京大微分幾何学

ゼミナール 3

層と微分幾何学

（第２版）

１９６３年

Sheaves and Differential Geometry

(2nd edition)

By

Seizi Takizawa and Toshimasa Yagyu

Seminar in Differential Geometry 3,

Kyoto University

1963

序　文

このシリーズも第三巻におよんで堂々たる大冊へと成長したのは欣快至極である。これまでの二冊はゼミナールの内容を直接まとめたものであつたが，本巻は折にふれてのべられたものをこのたび大部の補足を加えて整理したものであり，総合報告の形式になつている。

著者は極力よみやすくなるように努力されたが，微分幾何学の発展は誠にいちぢるしく，広い分野と関連しつつ益々深く複雑になつてきた。ファイバーバンドルの理論はすでに十分消化され，さらに「層の理論」が常識化されようとしている。理解の困難を克服して，複雑が明解へと転化するよう期待したい。

本巻は一応このような内容にまとめられたが，他の分野からもさらに理論の展開が要望されそうである。それについてはまた次の機会を待つこととし，その実現に努力するつもりである。

１９６０年１０月１日

松本　誠

改訂版への序

このシリーズの第3巻を出したときには，それ以前のものと異なり，1つの大きな夢をもつて書かれたものであり，このように大部のものを出してあとがどうなるかずいぶん心配したものである。それが逆に著者の手もとにのこしておく分にも事欠くようになつたのは全く各位の御協力のおかげであつたことと，深く感謝にたえない次第である。

それにもかかわらず，印刷の不手際によつて，ずい分よみづらいものになつてしまつた。各位に御迷惑をおかけしたことと思う。それで，この版はタイプ印刷にしたので，大変よみやすくなつたものと思う。内容については初版と根本的に変りはなく，ただところどころ説明をくわしくした程度である。

さて，初版を出してから数年たつた。その間に学問のこの分野においても，めざましい発展がなされてきた。これらの発展にもかかわらず，ここにもられた内容によつて，現代の最尖端にまで登りつめるだけの知識は十分にえられるものと信ずる。しかし種々の点で補足，ないしさらに展開したいことも多くある。これらについて，これに続く第4巻，第5巻…………… が具体的に計画されている。

ここに，この改訂版に直接努力された滝沢，柳生の両氏に深く感謝しますとともに，さらに今後，益々御厚情をたまわりますよう，各位にお願い申し上げます。

1963年5月1日

京大微分幾何ゼミナール

代表　松本　誠

層と微分幾何学　目　次

I　微 分 多 様 体

始めに微分多様体に関する基礎的な事柄およびよく用いられる記号の説明をしよう。

§1. 局 所 座 標

Mを paracompact な Hausdorff 空間とする。R^n をn次元実数空間（Euclid 空間）とし，Mの開集合UからR^n の開集合上への位相写像（homeomorphism）

$$\gamma : U \to \gamma(U) \subset R^n$$

をMの局所座標という。局所座標$\{U, \gamma\}$が与えられれば，Uの点xはn個の数の組$\gamma(x) = (x^1, \ldots, x^n) \in R^n$ で表わされる。これを点xの座標という。

定　義　Mがn次元C^r－ 多様体であるとは，MからR^n への局所座標の集まり$\{U_i, \gamma_i\}_{i \in I}$ が指定され，次の条件をみたすことである。

(i) $\{U_i\}_{i \in I}$ はMの開被覆である。

(ii) 点$x \in U_i \cap U_j$, $i, j \in I$, のγ_i, γ_j による座標をそれぞれ $(x^1, \ldots, x^n)$, $(x'^1, \ldots, x'^n)$ とするとき，函数

$$x'^\lambda = x'^\lambda(x^1, \ldots, x^n), \quad \lambda = 1, \ldots, n,$$

がr回連続的微分可能で $\det(\partial x'^\lambda / \partial x^\mu) \neq 0$である。

函数$x'^\lambda(x^1, \ldots, x^n)$が何回でも微分可能のとき$C^\infty$－ 多様体，更にanalyticのとき$C^\omega$－ 多様体または実解析多様体という。適当な$r$に対する$C^r$－ 多様体を微分多様体という。

MをC^r－ 多様体，指定された座標系を$\{U_i, \gamma_i\}_{i \in I}$ とする。Mの一つの局所座標$\{U, \gamma\}$があつて，これを座標系$\{U_i, \gamma_i\}_{i \in I}$につけ加えてもやはり条件（ii）がみたされるとき，$\{U, \gamma\}$をMの許容座標という。座標系$\{U_i, \gamma_i\}_{i \in I}$ に属するものは勿論許容座標である。同一の空間M上に条件（i），（ii）をみたす二通りの座標系$\{U_i, \gamma_i\}_{i \in I}$ $\{V_j, \delta_j\}_{j \in J}$が与えられ，一方の座標系に属する任意の局所座標が常に他方に対して許容であるとき，この二つの座標系はM上に同じ微分構造を定義するものと見なす。（VII，§2参照）。

M上の（局所的な）函数$f(x) \in R$, $x \in M$, が微分可能であるとは，これを許容座標を用いて表わして，実函数 $f(x^1, \ldots, x^n)$ が微分可能となることである。

この定義は，明らかに，同一点を含む許容座標のとり方に関係しない。

一つの許容座標$\{U, \gamma\}$をとり，点xの座標を$(x^1 \cdots\cdots, x^n)$とすれば，U上の函数$f^\lambda(x) \equiv x^\lambda$は微分可能である。

M，Lをそれぞれn次元，m次元の微分多様体とする。連続写像$\varphi : M \to L$が微分可能であるとは，Lの任意の微分可能函数fに対して$f \circ \varphi$がMの微分可能函数となることである。許容座標を用いて

$$\varphi : (x^1, \cdots\cdots, x^n) \to (y^1 \cdots\cdots, y^m)$$

$$y^a = \varphi^a(x^\lambda) \qquad a = 1, \cdots\cdots, m,$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f\circ\varphi"'] & L \arrow[d, "f"] \\ & R \end{tikzcd}$$

で表わすとき，函数φ^aが微分可能ということと同じである。

以下微分多様体の局所座標というときは常に許容座標をとることにする。

§2. 接ベクトル

n次元C^r－多様体M上の一点pをとり，点pにおける微分可能函数（の芽）全体をF_pとする。ここに“点pにおける函数”とはpの適当な近傍における函数という意味であるが，pの近傍U，Vにおける函数$f : U \to R$，$f' : V \to R$に対して，pの近傍WでU∩Vに含まれるものが存在して，W上で$f = f'$であるとき，fとf'とはpにおける同一の函数（の芽）を表わすものと見なしている。（V，§2参照）。

定義　点p∈Mにおける接ベクトルとは，写像

$$X : F_p \to R \text{（実数）}$$

であって次の条件をみたすものである。

(i) $X(af + bg) = aXf + bXg, \quad f, g \in F_p, \qquad a, b \in R$

(ii) $X(fg) = (Xf)\, g(p) + f(p)\, (Xg), \quad f, g \in F_p.$

この条件から特に定数$c \in R \subset F_p$に対して$Xc = 0$となることがわかる。局所座標$(x^1, \cdots\cdots, x^n)$をとるとき operations $(\partial/\partial x^\lambda)_p$ $(\lambda = 1, \cdots\cdots, n)$は明らかに接ベクトルである。そして点pにおける接ベクトル全体$T_p(M)$はn次元ベクトル空間をつくり，上のn個の接ベクトルが$T_p(M)$の baseとなる。実際，点pの座標を$(x_0^1, \cdots\cdots, x_0^n)$とすれば，任意の函数$f \in F_p$は点pの近傍で

$$f(x^\lambda) = a + \sum_\lambda b_\lambda (x^\lambda - x_0^\lambda) + \sum_{\lambda, \mu} g_{\lambda\mu}(x)\, (x^\lambda - x_0^\lambda)\, (x^\mu - x_0^\mu)$$

$$a = f(x_0^\lambda) \in R, \quad b_\lambda = \left(\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}\right)_p \in R, \quad g_{\lambda\mu} \in F_p,$$

と書くことができる。この展開を見れば，任意の接ベクトル$X \in T_p(M)$は

$$X = \sum_\lambda \xi^\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right)_p, \quad \xi^\lambda = X x^\lambda \in R,$$

の形となることが容易にわかる。

$T_p(M)$を点pにおけるMの接ベクトル空間という。更に

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$$

をMの接ベクトル・バンドルという。局所座標$(x^1, \cdots\cdots, x^n)$を用いて，T(M)上に$(x^1, \cdots\cdots, x^n, \xi^1, \cdots\cdots, \xi^n)$を許容座標とする位相および微分構造をいれることにより，T(M)はC^{r-1}－多様体となり，写像$x \to \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right)_x$はMからT(M)への局所的な微分（可能）写像となる。

ベクトル空間$T_p(M)$の双対空間を$T_p^*(M)$とする。函数$f \in F_p$に対して

$$\langle df, X \rangle = Xf, \qquad X \in T_p(M), \quad \text{（記号}\langle\ ,\ \rangle\text{は内積）}$$

となる元$df \in T_p^*(M)$が定まる。dfを函数fの微分という。

函数$f, g \in F_p$に対して

(2.1)　$d(af + bg) = a\,df + b\,dg, \quad a, b \in R$

(2.2)　$d(fg) = g(p)\, df + f(p)\, dg$

が成り立つことが容易にわかる。特に定数cに対して$dc = 0$である。局所座標$(x^1, \cdots, x^n)$をとれば，微分dx^λ $(\lambda = 1, \cdots\cdots, n)$は$T_p^*(M)$の baseをつくり，任意の元$\omega \in T_p^*(M)$は

$$\omega = \sum u_\lambda dx^\lambda, \qquad u_\lambda \in R$$

の形で与えられる。明らかに

$$\left\langle dx^\lambda, \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p \right\rangle = \delta_\mu^\lambda$$

が成り立つ。そして，集合

$$T^*(M)=\bigcup_{p\in M}T_p^*(M)$$

上にも $(x^1,\cdots,x^n,\ u_1,\cdots,u_n)$ を許容座標とする位相および微分構造をいれることができる。

微分写像 $X:M\to T(M)$ で，$p\to X_p\in T_p(M)$ となるものをM上のベクトル場という。また微分写像 $\omega:M\to T^*(M)$ で，$p\to\omega_p\in T_p^*(M)$ となるものをM上の1-formという。局所座標 (x^λ) をとれば，任意のベクトル場Xおよび1-form ω はそれぞれ

$$X=\sum_\lambda\xi^\lambda(x)\frac{\partial}{\partial x^\lambda},\qquad \omega=\sum_\lambda u_\lambda(x)\,dx^\lambda,$$

ξ^λ,u_λ ：微分可能函数，

の形で表わされる。M上のベクトル場X，Yに対して

$[X,Y]f=X(Yf)-Y(Xf)$，f：微分可能函数，

とおけば，$[X,Y]$ もまたM上のベクトル場となる。そして

(i) $[X,Y]$ は実係数で双一次

(ii) $[X,Y]=-[Y,X]$

(iii) $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$

が成り立つ。

$T_p(M)$，$T_p^*(M)$ をもとにして，一般に (r,s)-テンソル（r次反変，s次共変），外k-ベクトル（反変あるいは共変），更にこれらの場が定義される。これらは局所的には函数，ベクトル場および微分から生成されるものである。

§3. 誘導写像

M，Lを微分多様体，$\varphi:M\to L$ を微分写像とする。このとき写像

$$d\varphi:T(M)\to T(L)$$

が引き起される。これは $X\in T_x(M)$，$x\in M$，に対して

$$(d\varphi X)f=X(f\circ\varphi),\quad f\in F_{\varphi(x)}$$

で定義されるものである。明らかに

$$d\varphi:T_x(M)\to T_{\varphi(x)}(L)$$

は一次写像である。局所座標を用いて

$$\varphi:(x^\lambda)\to(y^\alpha),\quad y^\alpha=\varphi^\alpha(x^\lambda)$$

で表わせば，誘導写像 $d\varphi$ は

$$d\varphi:\ X\to Y,\quad X=\sum_\lambda\xi^\lambda\frac{\partial}{\partial x^\lambda},\quad Y=\sum_\alpha\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial y^\alpha},$$

$$(3,1)\qquad \eta^\alpha=\sum_\lambda\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^\lambda}\xi^\lambda$$

で与えられる。実際，函数 $f=f(y^\alpha)\in F_{\varphi(x)}$ に対して

$$Yf=X(f\circ\varphi)$$

$$=\sum_\lambda\xi^\lambda\frac{\partial}{\partial x^\lambda}f(\varphi^\alpha(x^\lambda))=\sum_{\lambda,\alpha}\xi^\lambda\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{\partial f}{\partial y^\alpha}$$

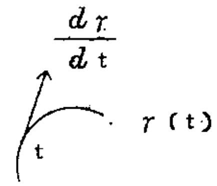
となるからである。

微分写像 $\gamma:R\to M$，$t\to\gamma_t$（$t\in R$：実数）をM上の曲線という。簡単に曲線 $\gamma(t)$（t：パラメータ）と書くことがある。ベクトル $d\gamma\left(\frac{d}{dt}\right)\in T(M)$ をこの曲線の接ベクトルという。局所座標を用いて

曲線 $\gamma(t)$ を

$x^\lambda=\gamma^\lambda(t)$

で表わせば



$$d\gamma:T(R)\to T(M)$$
$$\frac{d}{dt}\to\frac{d\gamma}{dt}$$

$$\frac{d\gamma(t)}{dt}=\sum_\lambda\frac{d\gamma^\lambda(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}$$

である。

微分多様体M，Nの位相積M×Nもまた微分多様体となり，

$$T(M\times N)\cong T(M)\times T(N),$$

$$T_{(x,y)}(M\times N)\cong T_x(M)\oplus T_y(N)\qquad(\text{直和})\qquad x\in M,\ y\in N,$$

である。実際M，Nの局所座標(x^λ)，(y^μ)をとれば，(x^λ, y^μ)がM×Nの局所座標となり，したがって$T_{(x,y)}(M\times N)$のベクトルは

$$\sum_\lambda \xi^\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right)_x+\sum_\mu \eta^\mu\left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)_y,\qquad \xi^\lambda,\eta^\mu\in R$$

の形で与えられる。

いま，微分写像$\varphi: M\times N\to K$が積の記号

$$\varphi(x,y)\equiv xy\qquad x\in M,\quad y\in N,$$

で書かれているとしよう。点$p\in M$あるいは点$q\in N$を固定すれば，それぞれ写像

$$\varphi_p: N\to K,\qquad y\to py,\qquad y\in N,$$

$$\varphi_q: M\to K\qquad x\to xq,\qquad x\in M,$$

が得られる。このとき，誘導写像もやはり積の記号

$$d\varphi_p: T(N)\to T(K),\quad Y\to pY,\qquad Y\in T(N)$$

$$d\varphi_q: T(M)\to T(K),\quad X\to Xq,\qquad X\in T(M)$$

で表わすことにすれば，始めの写像

$$\varphi: M\times N\to K,\ (x,y)\to xy$$

の誘導写像は

$$d\varphi: T(M)\times T(N)=T(M\times N)\to T(K)$$

$$(X,Y)\to Xy+xY$$

$$X\in T_x(M),\ Y\in T_y(N),$$

で与えられる。実際，局所座標を用いて

$$\varphi:\quad (x^\lambda, y^\mu)\to(z^\nu),\quad z^\nu=\varphi^\nu(x^\lambda,y^\mu)$$

とすれば，誘導写像$d\varphi$は，

$$d\varphi:\ (X,Y)\to Z,\quad X\in T_x(M),\ Y=T_y(N)$$

$$X=\sum_\lambda \xi^\lambda\frac{\partial}{\partial x^\lambda},\quad Y=\sum_\mu \eta^\mu\frac{\partial}{\partial y^\mu},\quad Z=\sum_\nu \zeta^\nu\frac{\partial}{\partial z^\nu}$$

とおくとき

$$\zeta^\nu=\sum_\lambda\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial x^\lambda}\xi^\lambda+\sum_\mu\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial y^\mu}\eta^\mu$$

となり，これは(3，1)によって$Xy+xY$を与えるものである。

積の記号で表わされる写像は後にしばしば現われる。その場合も上述の記法に従うことにする。なお簡単のため，写像$\varphi: M\to L$の誘導写像も同じ文字

$$\varphi: T(M)\to T(L)$$

で表わすことが多い。

§4. 微分形式

Mを微分多様体として

$$T^k_x(M)=T_x(M)\oplus\cdots\cdots\oplus T_x(M)\qquad(k\text{個の直和}),$$

$$T^k(M)=\bigcup_{x\in M}T^k_x(M)$$

とおけば，$T^k(M)$は$T(M)\times\cdots\cdots\times T(M)$（$k$個）の部分空間で，やはり微分多様体となる。

定義1　Mを微分多様体，Vを有限次元実ベクトル空間とする。

3. 微分写像

$\alpha: T^k(M)\to V$，$(X_1,\cdots\cdots,X_k)\to\alpha(X_1,\cdots\cdots X_k)$が変数$X_1,\cdots\cdots X_k\in T_x(M)$に関して複一次かつ交代的であるとき，$\alpha$をM上の値域Vの$k$次微分形式(V−valued k−form)という。

Vのbase(e_i)をとれば

$$\alpha=\sum\alpha^i e_i,\quad \alpha^i:\ R\text{−valued k−form},$$

で与えられる。なお 0−form とはM上の函数のことである。また値域Rの1−form は§2で定義されたものと同じで，

$$\omega(X)=\langle\omega, X\rangle,\quad X\in T_x(M)$$

とすればよい。

U, V, Wをベクトル空間とし，$F: U\times V \to W$を双一次写像とする。U, V, Wの bases (a_i)，(b_j)，(c_h) をとれば，ベクトル

$$u=\sum_i u^i a_i \in U, \quad v=\sum_j v^j b_j \in V, \quad u^i, v^j \in R$$

に対して，$F(u, v)$ は

$$F(u, v)=\sum_{i,j,k} a^h_{ij}\, u^i v^j c_h, \qquad a^h_{ij} \in R$$

の形で与えられるものである。

定義２　微分多様体Mにおいて，αを値域Uの k−form，βを値域Vの l−from とする。双一次写像$F: U\times V\to W$に対して，値域Wの $(k+l)$−form $F(\alpha, \beta)$ を次のように定義する：$X_1, \cdots\cdots, X_{k+l} \in T_x(M)$，$x \in M$，に対して

$$(4, 1) \quad F(\alpha, \beta)(x_1, \cdots\cdots, x_{k+l})$$

$$=\sum \frac{\mathrm{sgn}(\sigma)}{(k+l)!} F(\alpha(X_{\sigma(1)}, \cdots\cdots, X_{\sigma(k)}), \beta(\cdots, X_{\sigma(k+l)})),$$

ここに$\sum$は$\{1, \cdots\cdots, k+l\}$ のあらゆる置換σについての和を表わし，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ はσの符号である。

この定義から，特に$U=V$のとき

$${}^tF(u, v)=F(v, u), \quad u, v \in U$$

とおけば，値域Uの forms α，βに対して

$${}^tF(\alpha, \beta)=(-1)^{kl}\ F(\beta, \alpha)$$

が成り立つことがわかる。更に

${}^tF=F$ （対称）のとき，$F(\alpha, \beta)=(-1)^{kl}\ F(\beta, \alpha)$，

${}^tF=-F$ （交代）のとき，$F(\alpha, \beta)=(-1)^{kl+1}\ F(\beta, \alpha)$，

となる。また

$$F: R\times R\to R, \quad F(u, v)\equiv uv \ (\text{実数の積})$$

のとき，実値域の k−form α，l−form β に対して$\alpha\beta$は外積と呼ばれ，普通$\alpha\wedge\beta$で表わされる。この場合${}^tF=F$であるから

$$(4, 2) \quad \alpha\wedge\beta=(-1)^{kl}\ \beta\wedge\alpha$$

が成り立つ。一般に双一次写像$F: U\times V\to W$を，base を用いて，

$$F(u, v)=\sum_{i,j,h} a^h_{ij}\, u^i v^j c_h, \quad a^h_{ij} \in R$$

で表わすとき，forms $\alpha=\sum_i \alpha^i a_i$，$\beta=\sum_j \beta^j b_j$ に対して

$$(4, 3) \quad F(\alpha, \beta)=\sum_{h,i,j} (a^h_{ij}\ \alpha^i\wedge\beta^j)\, c_h$$

で与えられる。

定義（4.1）から更に一般に複一次写像

$$F: V_1\times V_2\times\cdots\cdots\times V_r\to W$$

に対して，M上の値域V_iの forms α_i を代入してM上の値域Wの form $F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_r)$をつくることができる。

なお，任意の実値域 k−form α は，局所的には

$$(4, 4) \quad \alpha=\sum f\, dg_1\wedge\cdots\cdots\wedge dg_k, \quad f, g_i: \text{函数},$$

の形で表わすことができる。これは局所座標をとって見れば明らかである。

また，$\varphi: M\to L$を微分写像とし，誘導写像も同じ文字

$$\varphi: T(M)\to T(L)$$

で表わすことにする。N上の値域Vの k−form α に対して，M上の値域Vの k−form $\alpha\circ\varphi$ が引き起される。

$$\begin{tikzcd} T^k(M) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\alpha\circ\varphi"'] & T^k(N) \arrow[d, "\alpha"] \\ & V \end{tikzcd}$$

即ち

$$(\alpha\circ\varphi)(X_1, \cdots\cdots, X_k)=\alpha(\varphi X_1, \cdots\cdots, \varphi X_k)$$

$$X_i \in T_x(M), \quad x \in M,$$

で与えられる。そして双一次写像Fに対して

$$(4, 5) \quad F(\alpha\circ\varphi, \beta\circ\varphi)=F(\alpha, \beta)\circ\varphi$$

が成り立つことは定義（4.1）から明らかである。

§5. Lie 微分

Mは微分多様体，$\mathcal{D}$はR×Mの開集合で，次の条件をみたすものとする：即ち，任意の点$x\in M$に対して集合

$$I_x=\{\,t\in R;\ (t,x)\in\mathcal{D}\,\}$$

はRの開区間で点0（ゼロ）を含む。

定義1.　微分写像$\varphi:\mathcal{D}\to M$が次の条件をみたすとき，φをM上の1径数（parameter）変換準群という：即ち，

$$\varphi_t(x)=\varphi(t,x),\quad (t,x)\in\mathcal{D}$$

とおくとき

(i) $\varphi_0(x)=x,\quad x\in M,$

(ii) $\varphi_t\circ\varphi_s(x)=\varphi_{t+s}(x),$

$$(s,x),\ (t,\varphi_s(x)),\ (t+s,x)\in\mathcal{D}.$$

明らかに

$$\varphi_{-t}=\varphi_t^{-1},\quad \varphi_t\circ\varphi_s=\varphi_s\circ\varphi_t$$

が成り立つ。またφ_tは微分同型（φ_t,φ_t^{-1}が微分写像）である。特に$\mathcal{D}=R\times M$上で定義されているとき，φを1径数変換群という。

1ーパラメータ変換準群$\varphi:\mathcal{D}\to M$に対して，M上のベクトル場Xを次のように定義する：

$$(5,1)\quad Xf=\frac{d}{dt}(f\circ\varphi_t)_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{f\circ\varphi_t-f}{t},\quad f\in F_x,\ x\in M.$$

φは微分写像だから，確かにXは定まる。Xをφの無限小変換という。逆にM上のベクトル場Xが与えられれば，Xを無限小変換とする1径数変換準群φが存在することは，一階常微分方程式の解の存在定理によつて保証される。

なお，φとXとの関係を幾何学的に見れば次のようになる。

任意の点$p\in M$に対してpを通る曲線

$$\varphi_p: I_p\to M,\quad t\to\varphi(t,p),$$
$$\varphi_p(0)=\varphi(0,p)=p,$$

が考えられる。この曲線の点pにおける接ベクトルがXに他ならない。即ち

$$X: p\to X_p=\left(\frac{d\varphi_p}{dt}\right)_{t=0}$$

である。実際，局所座標(x^λ)を用いて，曲線$\varphi_p(t)$を

$$x^\lambda=\varphi_p^\lambda(t)$$

で表わせば，M上の函数$f(x^\lambda)$に対して

$$X_pf=\frac{d}{dt}f(\varphi_p^\lambda(t))_{t=0}=\Bigl(\sum_\lambda\frac{d\varphi_p^\lambda}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}\Bigr)_{t=0}=\left(\frac{d\varphi_p}{dt}\right)_{t=0}$$

である（§3参照）．記号の定義により

$$\varphi_p(t)=\varphi_t(p),\quad (t,p)\in\mathcal{D}$$

であるから，関係

$$\varphi_t\circ\varphi_s(p)=\varphi_{t+s}(p)=\varphi_s\circ\varphi_t(p)$$

は　$\varphi_p(t+s)=\varphi_t\circ\varphi_p(s)=\varphi(s,\varphi(t,p))$

と書かれる。これに微分$(d/ds)_{s=0}$を施せば，曲線$\varphi_p(t)$の接ベクトルは

$$\frac{d\varphi_p}{dt}=\varphi_tX_p=X_{\varphi(t,p)}$$

で与えられる。ただしφ_tからの誘導写像も同じくφ_tで表わした。したがつてM上の常微分方程式

$$\frac{d\varphi}{dt}=X_\varphi$$

を初期条件$\varphi(0)=p$で解いた解が$\varphi(t,p)$である。

さて，U，U'をMの開集合，$\Psi: U\to U'$を微分同型とし，誘導写像も同じく$\Psi: T(U)\to T(U')$で表わそう。AをM上のベクトル場またはformとする。微分同型ΨによつてAから引き起されるU上のベクトル場またはformをΨ^*Aで表わす。即ち0−form（函数）fに対しては$\Psi^*f=f\circ\Psi$，ベクトル場Yに対しては$\Psi^*Y=\Psi^{-1}Y$，そしてk−form θに対しては$\Psi^*\theta=\theta\circ\Psi$である。

定義2　XをM上のベクトル場，Aをベクトル場またはformとする。Xを無限小変換とする1径数変換準群φ_tをとり，AのXによるLie 微分　$\mathcal{L}_X A$を

$$(5,2)\qquad \mathcal{L}_X A=\frac{d}{dt}(\varphi_t^{*}A)_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t^{*}A-A}{t}$$

で定義する。

ベクトル場のLie 微分はやはりベクトル場，k−formのLie 微分はやはりk−formである。一般に（r，s）−テンソル場Aに対しても同様にLie 微分$\mathcal{L}_X A$が定義され，これもまた（r，s）−テンソル場となる。次の公式が成り立つことは容易にわかる。

命題1

(1) $\mathcal{L}_X(aA+bB)=a\mathcal{L}_X A+b\mathcal{L}_X B$，　$a,b\in R$

(2) $\mathcal{L}_X F(\alpha,\beta)=F(\mathcal{L}_X\alpha,\beta)+F(\alpha,\mathcal{L}_X\beta)$

　　α,β：forms，　F：双一次写像

(3) $\mathcal{L}_X(\alpha\wedge\beta)=\mathcal{L}_X\alpha\wedge\beta+\alpha\wedge\mathcal{L}_X\beta$

　　α,β：実値域のforms

(4) $\mathcal{L}_X(A\otimes B)=\mathcal{L}_X A\otimes B+A\otimes\mathcal{L}_X B$

　　A，B：テンソル場

(5) $\mathcal{L}_X\langle\omega,Y\rangle=\langle\mathcal{L}_X\omega,Y\rangle+\langle\omega,\mathcal{L}_X Y\rangle$

　　ω：実値域1−form，　Y：ベクトル場

また次が成り立つ。

命題2

(1) 函数fに対して，$\mathcal{L}_X f=Xf$

(2) 微分dfに対して，$\mathcal{L}_X df=d(Xf)$

(3) ベクトル場Yに対して，$\mathcal{L}_X Y=[X,Y]$

（証明）(1) $\varphi_t^{*}f=f\circ\varphi_t$ であるから定義式（5．1）より

$$\mathcal{L}_X f=\frac{d}{dt}(f\circ\varphi_t)_{t=0}=Xf$$

(2) $\varphi_t^{*}df=df\circ\varphi_t$ であるから，任意のベクトル$Z\in T(M)$に対して

$\langle df\circ\varphi_t,Z\rangle=\langle df,\varphi_t Z\rangle=(\varphi_t Z)f=Z(f\circ\varphi_t)$.

両辺に$(d/dt)_{t=0}$を施せば，(1)より

$\langle\mathcal{L}_X df,Z\rangle=Z(\mathcal{L}_X f)=Z(Xf)=\langle d(Xf),Z\rangle$

ゆえに$\mathcal{L}_X df=d(Xf)$を得る。

(3) 命題1，(5)を考慮すれば，任意の函数fに対して

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X Y)f&=\langle df,\mathcal{L}_X Y\rangle\\&=\mathcal{L}_X\langle df,Y\rangle-\langle\mathcal{L}_X df,Y\rangle\\&=\mathcal{L}_X(Yf)-\langle d(Xf),Y\rangle\\&=X(Yf)-Y(Xf)=[X,Y]f\end{aligned}$$

ゆえに$\mathcal{L}_X Y=[X,Y]$となる。　（証明終）

一般に（r，s）−テンソル場あるいはk−formは局所的には函数，微分およびベクトル場によつて生成される。したがつて命題1，2からこれらのLie 微分を表わす式をつくることができる。

命題3　　X，Y_1，……，Y_kをベクトル場，θをk−formとすれば，

$$X(\theta(Y_1,\dots\dots,Y_k))=(\mathcal{L}_X\theta)(Y_1,\dots\dots,Y_k)+\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\theta([X,Y_i],Y_1,\dots,\hat{Y}_i,\dots,Y_k),$$

ここに記号$\hat{Y}_i$はY_iを除くことを意味する。

（証明）　$X(\theta(Y_1,\dots\dots,Y_k))$

$$\begin{aligned}&=\frac{d}{dt}(\theta(Y_1,\dots\dots,Y_k)\circ\varphi_t)_{t=0}\\&=\frac{d}{dt}\{(\theta\circ\varphi_t)(\varphi_t^{-1}Y_1,\dots\dots,\varphi_t^{-1}Y_k)\}_{t=0}\\&=(\mathcal{L}_X\theta)(Y_1,\dots\dots,Y_k)+\sum_{i=1}^{k}\theta(Y_1,\dots\dots,\mathcal{L}_X Y_i,\dots,Y_k)\\&=(\mathcal{L}_X\theta)(Y_1,\dots\dots,Y_k)\\&\quad+\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\theta([X,Y_i],Y_1,\dots,\hat{Y}_i,\dots,Y_k).\end{aligned}$$

§6. 外微分

定義　M上の値域Vの任意のk－form θ に対して，値域Vの $(k+1)$－form $d\theta$ を対応させる写像 $d:\theta\to d\theta$ が次の条件をみたすとき，d を外微分という。

(i) 値域Vのk－forms θ,θ' に対して，

$$d(\theta+\theta')=d\theta+d\theta'$$

(ii) 函数(0－form) $\theta=f$ に対して，$d\theta=df$ (微分)。

(iii) 微分 $\theta=df$ に対して，$d\theta=0$。

(iiii) 実値域のform θ，および函数 f に対して，

$$d(\theta\wedge df)=d\theta\wedge df.$$

(V) 値域Vのform θ，一次写像 $F:V\to W$ に対して，

$$dF(\theta)=F(d\theta).$$

これらの条件をみたす写像 d が存在することは，すぐ後の定理で保証される。また上の条件からこのような d は一意的である。なぜなら，特に実値域のk－form θ は局所的には

$$\theta=\Sigma f\,dg_1\wedge\cdots\cdots\wedge dg_k,\quad f,\ g_i:\text{函数},$$

の形で表わされ，このとき条件(i)～(iiii)より

$$(6,1)\quad d\theta=\Sigma df\wedge dg_1\wedge\cdots\wedge dg_k$$

でなければならない。よって $d\theta$ は一意的である。一般に値域Vのk－form θ はVのbase (e_λ) をとることにより

$$\theta=\sum_\lambda\theta^\lambda e_\lambda,\qquad \theta^\lambda:\text{実値域k-form},$$

で表わされ，一次写像

$$F^\lambda:V\to R,\quad v\to v^\lambda,\quad v=\sum_\lambda v^\lambda e_\lambda,$$

を考えれば，条件(V)より

$$(6,2)\quad d\theta=\sum_\lambda d\theta^\lambda e_\lambda$$

でなければならない。よって $d\theta$ は一意的に定まる。

なお(2,2)，(4,2)を考慮すれば，条件(ii)および(6,1)から，

$$(6,3)\quad d(\theta\wedge\omega)=d\theta\wedge\omega+(-1)^k\theta\wedge d\omega$$

θ：実値域k－form，ω：実値域 l－form，

となり，更に(4,3)から

$$(6,4)\quad dF(\theta,\omega)=F(d\theta,\omega)+(-1)^k F(\theta,d\omega)$$

$F:U\times V\to W$：双一次写像

θ：値域Uのk－form，ω：値域Vの l－form，

が成り立つ。また(6,1)より，外微分 d は

$$d\circ d=0$$

をみたすことがわかる。

定理　θ を値域Vのk－form，$X_1,\cdots\cdots,X_{k+1}$ をベクトル場とすれば，外微分 $d\theta$ は次の公式で与えられる。

$$(6,5)\quad d\theta(X_1,\cdots\cdots,X_{k+1})$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(-1)^{i-1}}{k+1}X_i(\theta(X_1,\cdots\cdots,\hat{X}_i,\cdots\cdots,X_{k+1}))$$

$$+\sum_{i<j}\frac{(-1)^{i+j}}{k+1}\theta([X_i,X_j],X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{k+1})$$

(証明) 上式(6,5)で $d\theta$ を定義するとき，これは見かけ上は“ベクトル場 $X_1,\cdots\cdots,X_{k+1}$ の函数”であって，このようなものはまだまだformとはいえない。この函数 $d\theta$ がformとなるためには，$d\theta$ は $X_1,\cdots\cdots,X_{k+1}$ に関して複一次かつ交代的であって，更に点 $p\in M$ における値

$$d\theta(X_1,\cdots\cdots,X_{k+1})_p$$

が接ベクトル $(X_1)_p,\cdots\cdots,(X_{k+1})_p\in T_p(M)$ だけで定まること，即ち

$$(X_i)_p=(X'_i)_p\qquad i=1,2,\cdots\cdots,k+1,$$

なる二通りのベクトル場 $X_1,\cdots\cdots,X_{k+1}$；$X'_1,\cdots\cdots,X'_{k+1}$ に対して

$$d\theta(X_1,\cdots\cdots,X_{k+1})_p=d\theta(X'_1,\cdots\cdots,X'_{k+1})_p$$

が成り立つことを証明しなければならない。複一次かつ交代的であることは定義式(6,5)から明らかである。よって $(X_1)_p=0$ のとき

$$d\theta(X_1,\cdots\cdots,X_{k+1})_p=0$$

を証明すれば十分である。$(X_1)_p=0$ および§5，命題3から

$$X_1(\theta(X_2,\ldots\ldots,X_{k+1}))_p=0,$$

$$X_i(\theta(X_1,\ldots\ldots,\hat{X}_i,\ldots\ldots,X_{k+1}))_p$$
$$=\theta([X_i,X_1],X_2,\ldots\ldots,\hat{X}_i,\ldots\ldots,X_{k+1})_p,\ i\neq 1,$$

$$\theta([X_i,X_j],X_1,\ldots\ldots,\hat{X}_i,\ldots\ldots,\hat{X}_j,\ldots\ldots,X_{k+1})_p=0,$$

$$i\neq 1,\qquad i<j,$$

である。ゆえに定義式（6，5）から

$$d\theta(X_1,\ldots\ldots,X_{k+1})_p$$

$$=\sum_{i=2}^{k+1}\frac{(-1)^{i-1}}{k+1}\theta([X_i,X_1],X_2,\ldots\ldots,\hat{X}_i,\ldots\ldots,X_{k+1})_p$$
$$+\sum_{j=2}^{k+1}\frac{(-1)^{1+j}}{k+1}\theta([X_1,X_j],X_2,\ldots\ldots,\hat{X}_j,\ldots\ldots X_{k+1})_p=0$$

となる。したがつて（6，5）で定義される$d\theta$は確かにform である。あとはこれが外微分の条件（i）～（V）をみたすことをいえばよい。先ず（i），（V）は定義式から明らかである。次に（ii），（iii）は，定義式（6，5）において，それぞれ$\theta=f$，$\theta=df$とすれば

$$d\theta(X)=Xf=\langle df,X\rangle,$$

$$d(df)(X,Y)=\frac{1}{2}\{X(df(Y))-Y(df(X))-df([X,Y])\}$$

$$=\frac{1}{2}(X(Yf)-Y(Xf)-\langle df,[X,Y]\rangle)$$

$$=\frac{1}{2}([X,Y]f-[X,Y]f)=0,$$

となり成立する。最後に（iii）を証明しよう。局所座標(x^λ)に対してベクトル場$(\partial/\partial x^\lambda)$をとれば，これらは各点$p\in M$において$T_p(M)$ のbase をつくり，しかも

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\lambda},\ \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right]=0$$

が成り立つ。

そしてform は複一次だからbase$(\partial/\partial x^\lambda)$の中からとつた$k+1$個のベクトル場に対して（iii）が成り立つことを示せばよい。したがつてベクトル場$X_1,\ldots,X_{k+1}$が

$$[X_i,X_j]=0$$

をみたすとき，$(k-1)$－form θ，および微分dfに対して

$$d(\theta\wedge df)(X_1,\ldots\ldots,X_{k+1})=(d\theta\wedge df)(X_1,\ldots\ldots,X_{k+1})$$

が成り立つことをいえば十分である。（4，1）より

$$(\theta\wedge df)(X_1,\ldots\ldots,X_k)$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{k}\theta(X_1,\ldots\ldots,\hat{X}_j,\ldots\ldots,X_k)(X_jf)$$

となる。また（6，5）において$[X_i,X_j]=0$を考慮すれば

$$d\theta(X_1,\ldots\ldots,X_k)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{k}X_i(\theta(X_1,\ldots\ldots,\hat{X}_i,\ldots\ldots,X_k)),$$

$$d(\theta\wedge df)(X_1,\ldots\ldots,X_{k+1})$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(-1)^{i-1}}{k+1}X_i((\theta\wedge df)(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{k+1}))$$
$$=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(-1)^{i-1}}{k+1}X_i\Big\{\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(-1)^{j-1}}{k}\theta(X_1,\ldots\hat{X}_j\ldots\hat{X}_i\ldots,X_{k+1})(X_jf)$$
$$+\sum_{j=i+1}^{k+1}\frac{(-1)^{j}}{k}\theta(X_1,\ldots\hat{X}_i\ldots\hat{X}_j\ldots,X_{k+1})(X_jf)\Big\}$$
$$=\sum_{j=1}^{k+1}\frac{(-1)^{j-1}}{k+1}d\theta(X_1,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{k+1})(X_jf)$$
$$+\sum_{i<j}\frac{(-1)^{i+j}}{(k+1)k}\theta(X_1,\ldots\hat{X}_i\ldots\hat{X}_j\ldots,X_{k+1})\underset{\substack{\shortparallel\\0}}{[X_i,X_j]}f$$
$$=(d\theta\wedge df)(X_1,\ldots\ldots,X_{k+1})$$

となり，（iii）が成り立つ。よつて（6，5）で定義される$d\theta$はθの外微分である。

（証明終）

特に1−form ω，ベクトル場X，Yに対して，公式

$$(6,6)\quad d\omega(X,Y)=\frac{1}{2}\{X(\omega(Y))-Y(\omega(X))-\omega([X,Y])\}$$

が成り立つ。

命題　φ：M→Nを微分写像，αをN上のform とすれば，

$$d(\alpha\circ\varphi)=d\alpha\circ\varphi$$

（証明）　一般のform は局所的には函数と微分とで生成されるから，（4，5）より，函数fおよび微分dfについて証明すれば十分である。任意のベクトル$x\in T(M)$に対して

$$\langle d(f\circ\varphi),X\rangle=X(f\circ\varphi)=(\varphi X)f$$
$$=\langle df,\varphi X\rangle=\langle df\circ\varphi,X\rangle$$

ゆえに　$d(f\circ\varphi)=df\circ\varphi$である。また

$$d(df\circ\varphi)=d(d(f\circ\varphi))=0=d(df)\circ\varphi.$$

§7. 複素解析多様体

複素解析多様体の定義は実微分可能のときと同様で，ただ座標系$\{U_i,\gamma_i\}_{i\in I}$に属する局所座標としては

$$\gamma_i:U_i\to\gamma_i(U_i)\subset C^n\quad(\text{複素数空間})$$

をとり，$U_i\cap U_j$ 上での座標変換

$$z'^\lambda=z'^\lambda(z^\mu),\quad \det(\partial z'^\lambda/\partial z^\mu)\neq 0$$

は正則（holomorphic）とすればよい。

n次元複素解析多様体Mはまた$2n$次元実C^∞−多様体と考えられる。これを区別するときはM_C，M_R と書くことにする。即ちM_cの局所座標(z^λ)に対して

$$z^\lambda=x^\lambda+\sqrt{-1}\,y^\lambda,\quad x^\lambda,y^\lambda\in R$$

とおくとき，(x^λ,y^λ)をM_Rの局所座標と思えばよい。

複素解析多様体M上の函数fが正則であるとは，これを局所座標を用いて表わして$f(z^1,\ldots\ldots,z^n)$が正則となることであつて，そのための必要十分条件は，

$$z^\lambda=x^\lambda+\sqrt{-1}\,y^\lambda,\quad x^\lambda,y^\lambda\in R$$
$$f(z^\lambda)=g(x^\lambda,y^\lambda)+\sqrt{-1}\,h(x^\lambda,y^\lambda),\quad g,h:\text{実函数},$$

とおいて，Cauchy-Riemann の条件

$$\frac{\partial g}{\partial x^\lambda}=\frac{\partial h}{\partial y^\lambda},\quad \frac{\partial g}{\partial y^\lambda}=-\frac{\partial h}{\partial x^\lambda}$$

がみたされることである。

いまVをn次元複素ベクトル空間としよう。Vはまた$2n$次元実ベクトル空間と考えられる。それは実数$a\in R$とベクトル$v\in V$との積$av\in V$が当然定義されているからである。区別するときはV_c，V_Rと書くことにする。V_cの複素一次変換

$$J:V_c\to V_c,\qquad v\to\sqrt{-1}\,v,\qquad v\in V,$$

は勿論V_Rの実一次変換であつて$J^2=-1$をみたす。逆に$2n$次元実ベクトル空間Vにおいて，$J^2=-1$なる一次変換

$$J:V\to V$$

が指定されれば，複素数$c\in C$とベクトル$v\in V$との積を

$$cv=av+bJv,\quad c=a+\sqrt{-1}\,b,\quad a,b\in R$$

で定義することにより，Vはn次元複素ベクトル空間となる。この一次変換JをVの複素構造という。

またVをm次元実ベクトル空間としよう。Vの base (e_λ)をとり，同じく(e_λ)をbaseとするm次元複素ベクトル空間をCVで表わす。これはVの係数Rを形式的にCまで拡張したもので，base (e_λ)のとり方に関係なく定義される。即ち複素数体Cは2次元実ベクトル空間であるからテンソル積$C\otimes V$は$2m$次元実ベクトル空間となる。複素数$c\in C$とベクトル

$$w=\Sigma c_\alpha\otimes v_\alpha\in C\otimes V$$

との積を$cw=\Sigma(cc_\alpha)\otimes v_\alpha$で定義すれば，この積は矛盾なく定まり，$C\otimes V$は$m$次元複素ベクトル空間となる。これがCVである。ただし$1\otimes v=v$とおく。任意のベクトル$w\in CV$は

$$w=u+\sqrt{-1}\,v,\qquad u,v\in V$$

の形で一意的に表わされるから，実ベクトル空間としての同型

$$CV\overset{R}{\cong}V\underset{R}{\oplus}V',\qquad V'=\sqrt{-1}\,V,$$

が成り立つ。

m次元実ベクトル空間Vの双対空間はV上の実値域一次写像全体

$$V^*=\{\alpha : V\to R\ ;\ \text{linear}\}$$

であるから，CV* はV上の複素値域の実一次写像全体

$$CV^*=\{\alpha : V\to C\ ;\ \text{linear}\}$$

と考えられる。任意の実一次写像　$\alpha : V\to C$は一意的に複素一次写像

$$\alpha : CV\to C,\ u+\sqrt{-1}\,v\to\alpha(u)+\sqrt{-1}\,\alpha(v),\quad u,\ v\in V$$

に拡張されるから，複素ベクトル空間としての同型

$$CV^*\overset{C}{\cong}(CV)^*$$

が成り立つ。

次にVを2n次元実ベクトル空間としよう。複素構造

$$J : V\to V,\quad J^2=-1$$

が与えられると，Vはn次元複素ベクトル空間となる。一方Vから2n次元複素ベクトル空間CVが得られる。V_cとCVとの関係を見よう。実一次写像$J : V\to V$を複素一次写像

$$J : CV\to CV,\quad u+\sqrt{-1}\,v\to Ju+\sqrt{-1}\,Jv \qquad u,\ v\in V$$

に拡張しておく。直和分解

$$CV\overset{R}{\cong}V\oplus V',\qquad V'=\sqrt{-1}\,V,$$

は変換Jで保存されている。即ち$JV=V'$，$JV'=V'$である。また$J^2=-1$だから一次変換Jの最小多項式はx^2+1である。方程式$x^2+1=0$は重根をもたないから，JはCVにおいて対角化できる。またx^2+1はR上では既約であるから，Jの固有多項式は$(x^2+1)^n$でなければならない。CVにおいて，固有値$\sqrt{-1}$，$-\sqrt{-1}$に応ずるJの固有空間をそれぞれE，$\bar{E}$とすれば，これらはともにCVのn次元部分空間で

$$CV\overset{C}{\cong}E\underset{C}{\oplus}\bar{E}$$

となる。この直和分解による射影

$\pi : V\to E$，$v\to u$，$v=u+\bar{u}\in V$，$u\in E$，$\bar{u}\in\bar{E}$をとれば，

V，$\sqrt{-1}\,V$，E，$\bar{E}$はいずれもJで不変であるから，

$$J\circ\pi=\pi\circ J$$

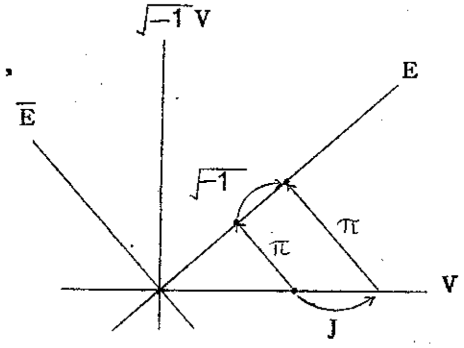
となり，またE上では$J=\sqrt{-1}$であるから，

$$\pi\circ J=\sqrt{-1}\,\pi$$

となる。よって

$$J=\pi^{-1}\sqrt{-1}\,\pi .$$

即ちV_cの複素構造はEの複素構造を bijection　$\pi : V\to E$によってV上に移したものである。



Mをn次元複素解析多様体とする。局所座標(z^λ)をとり，点$z\in M$における接ベクトル

$$\frac{\partial}{\partial z^\lambda} : f\to\left(\frac{\partial f}{\partial z^\lambda}\right)_z,\qquad f：正則函数，$$

をとる。点$z\in M$における複素接ベクトル空間$T_z(M_c)$　は$(\partial/\partial z^\lambda)$を base とする$n$次元複素ベクトル空間である。一方Mを2$n$次元実$C^\infty$−多様体と見なせば，$T_z(M_R)$　は$(\partial/\partial x^\lambda, \partial/\partial y^\lambda)$を base とする2$n$次元実ベクトル空間である。ただし

$$z^\lambda=x^\lambda+\sqrt{-1}\,y^\lambda,\quad x^\lambda,\ y^\lambda\in R,$$

とする。$T_z(M_c)$と$T_z(M_R)$との関係をしらべよう。いま$CT_z(M_R)$を考えれば，これは$(\partial/\partial x^\lambda, \partial/\partial y^\lambda)$を base とする2$n$次元複素ベクトル空間である。そこで

$$\frac{\partial}{\partial z^\lambda}=\frac{\partial}{\partial x^\lambda}+\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial y^\lambda},\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\lambda}=\frac{\partial}{\partial x^\lambda}-\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial y^\lambda}$$

とおけば，$\left(\dfrac{\partial}{\partial z^\lambda}, \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}^\lambda}\right)$もまた$CT_z(M_R)$　の base となる。そして複素接ベクトル空間$T_z(M_c)$は$CT_z(M_R)$内の$(\partial/\partial z^\lambda)$で張られる部分空間と見なすことができる。なお

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z^\lambda}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\lambda}\right),\quad \frac{\partial}{\partial y^\lambda}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z^\lambda}-\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\lambda}\right)$$

となるから，bijection

$$\pi : T_z(M_R) \to T_z(M_c) ; \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}, \frac{\partial}{\partial y^\lambda}\right) \to \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z^\lambda}, \frac{\sqrt{-1}}{2}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\lambda}\right)$$

によつて，両者を同一視すれば，$T_z(M_R)$ 自身Mの複素接ベクトル空間と考えてさしつかえない。このとき $T_z(M_R)_c$ の複素構造は

$$J = \pi^{-1}\sqrt{-1}\,\pi : \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}, \frac{\partial}{\partial y^\lambda}\right) \to \left(\frac{\partial}{\partial y^\lambda}, -\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right)$$

で与えられる。

$T_z(M_c)$ の双対空間 $T_z^*(M_c)$ は微分 (dz^λ) を base とする n 次元複素ベクトル空間である。一方 $T_z^*(M_R)$ は微分 (dx^λ, dy^λ) を base とする $2n$ 次元実ベクトル空間で，更に

$$CT_z^*(M_R) \cong (CT_z(M_R))^*$$

は (dx^λ, dy^λ) を base とする $2n$ 次元複素ベクトル空間である。そこで

$$dz^\lambda = dx^\lambda + \sqrt{-1}\ dy^\lambda,\ d\bar{z}^\lambda = dx^\lambda - \sqrt{-1}\ dy^\lambda$$

とおけば，$(dz^\lambda, d\bar{z}^\lambda)$ もまた $CT_z^*(M_R)$ の base となり，これは $(\partial/\partial z^\lambda, \partial/\partial\bar{z}^\lambda)$ の dual base となる。よつてM上の複素値域 C^∞ 函数 f の微分は

$$df = \sum_\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial z^\lambda} dz^\lambda + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\lambda} d\bar{z}^\lambda\right)$$

で与えられる。そして f が正則であるための条件は

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\lambda} = 0$$

となる。これは Cauchy-Riemann の条件を書きかえたものである。したがつて正則函数 f の微分は

$$df = \sum_\lambda \frac{\partial f}{\partial z^\lambda}\ dz^\lambda$$

で与えられる。以上のことから，複素解析多様体M上の任意の複素値域 C^∞ k-form θ は一意的に

$$\theta = \theta^{k,0} + \theta^{k-1,1} + \cdots\cdots + \theta^{1,k-1} + \theta^{0,k}$$

の形で表わされることがわかる。ここに $\theta^{r,s}$ は (r, s) - form と呼ばれ，局所座標 (z^λ) をとるとき

$$\theta = \sum_{\lambda,\mu} f_{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_r\mu_1\cdots\cdots\mu_s} dz^{\lambda_1}\wedge\cdots\cdots\wedge dz^{\lambda_r}\wedge d\bar{z}^{\mu_1}\wedge\cdots\cdots\wedge d\bar{z}^{\mu_s}$$

$f_{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_r\mu_1\cdots\cdots\mu_s}$ ：複素値域 C^∞ - 函数，の形で与えられるものである。この型 (r, s) が局所座標のとり方に関係しないことは，座標変換に対して，

$z'^\lambda = z'^\lambda(z^\mu)$ ：正則函数，

$$dz'^\lambda = \sum_\mu \frac{\partial z'^\lambda}{\partial z^\mu}\ dz^\mu,\ d\bar{z}'^\lambda = \sum_\mu \frac{\partial \bar{z}'^\lambda}{\partial \bar{z}^\mu}\ d\bar{z}^\mu,$$

となることから明らかである。

M上の (r, s) - forms 全体のつくる C-moduleを $A^{r,s}$ とすれば，複素値域 C^∞ k-forms 全体は C-module

$$A^k = \sum_{r+s=k} A^{r,s} \quad (\text{直和}) \quad r, s \geq 0,$$

をつくる。M上の複素値域の函数 $f \in A^{00}$ に対して

$$df = \sum_\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial z^\lambda} dz^\lambda + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\lambda}\ d\bar{z}^\lambda\right)$$

であるから，form $\theta^{r,s} \in A^{r,s}$ の外微分 $d\theta^{r,s}$ は一意的に

$$d\theta^{r,s} = \theta' + \theta'',\ \theta' \in A^{r+1,s},\ \theta'' \in A^{r,s+1},$$

の形で表わされる。そこで

$$d'\theta^{r,s} = \theta',\quad d''\theta^{r,s} = \theta''$$

とおくことにより，C-module の準同型

$$d' : A^{r,s} \to A^{r+1,s},\quad d'' : A^{r,s} \to A^{r,s+1}$$

を得る。そして外微分 d は

$$d = d' + d'' : A^k \to A^{k+1}$$

で与えられる。また$d \circ d=0$より

$$d' \circ d'=0\ ,\ d'' \circ d''=0\ ,\ d' \circ d''+d'' \circ d'=0$$

が成り立つことがわかる。

M上の正則なk−form θ とは局所座標 (z^{λ}) をとるとき

$$\theta=\sum_{\lambda} f_{\lambda 1 \cdots\cdots \lambda k} \quad dz^{\lambda 1} \wedge \cdots\cdots \wedge dz^{\lambda k},$$

$$f_{\lambda 1 \cdots\cdots \lambda k}：正則函数,$$

の形で表わされるものをいう。C^{∞} k−form θ が正則であるための条件は

$$\theta \in A^{k,0} \quad かつ \quad d''\theta=0$$

となることである。

II Lie 群

§1. Lie 群と Lie 代数

GをLie 群とする。即ちGはr次元実解析多様体かつ群であつて，その積

$$\eta : G\times G \to G\ ,\ (x\ ,\ y) \to xy$$

は解析写像である。点$a \in G$を固定すれば，微分同型

$$L_a : G \to G\ ,\quad x \to ax\ ,\quad x \in G$$

$$R_a : G \to G\ ,\quad x \to xa\ ,\quad x \in G$$

を得る。L_a，R_a をそれぞれ左移動，右移動という。L_a，R_a からの誘導写像も同じ記号で表わして

$$L_a : T(G) \to T(G)\ ,\ X \to aX,\ X \in T(G)$$

$$R_a : T(G) \to T(G)\ ,\ X \to Xa,\ X \in T(G)$$

とすれば，点$x \in G$に対して，写像

$$L_a : T_x(G) \to T_{ax}(G)\ ,\ R_a : T_x(G) \to T_{xa}(G)$$

はどちらもベクトル空間の bijection である。そして群の積ηからの誘導写像を$d\eta$とすれば，これは

$$\eta : G\times G \to G\ ,\quad (x\ ,\ y) \to xy\ ,$$

$$d\eta : T(G) \times T(G) \to T(G)\ ,\quad (X\ ,\ Y) \to Xy+xY\ ,\ X \in T_x(G)\ ,\ Y \in T_y(G)\ ,$$

で与えられ，多様体T(G)は積$d\eta$によつてやはりLie 群となる。G上のベクトル場

$$X^* : x \to X^*_x \in T_x(G)\ ,\quad x \in G\ ,$$

が$aX^*_b=X^*_{ab}$, $a, b \in G$, であるとき，X^* を左不変ベクトル場という。またG上のベクトル場

$$X^+ : x \to X^+_x \in T_x(G)\ ,\quad x \in G$$

が$X^+_b a=X^+_{ba}$ ，　$a\ ,\ b \in G$，であるとき，X^+を右不変ベクトル場という。即ち

$$L_a X^*=X^*\ ,\quad R_a X^+=X^+\ ,\quad a \in G$$

である。

群Gの恒等元eにおける接ベクトル空間を

$$\mathfrak{g} = T_e(G)$$

とすれば，任意のベクトル$A\in\mathfrak{g}$に対して

$$A^*_e = A, \quad A^+_e = A$$

となる左不変ベクトル場A^*および右不変ベクトル場A^+が一意的に定まる。実際

$$A^*_x = xA, \quad A^+_x = Ax, \quad x\in G,$$

とおけばよい。

A^*，B^*をG上の左不変ベクトル場とする。Gの左移動は微分同型であるから，任意の点$a\in G$に対して

$$L_a\,[A^*, B^*] = [L_a A^*, L_a B^*] = [A^*, B^*]$$

となり，$[A^*, B^*]$もまた左不変ベクトル場である。そこで，ベクトルA，$B\in\mathfrak{g}$に対して，左不変ベクトル場

$$A^*: x\to xA, \quad B^*: x\to xB, \quad x\in G$$

をとり，AとBとの積$[A, B]\in\mathfrak{g}$を

$$[A, B] = [A^*, B^*]_e$$

で定義すれば，実ベクトル空間$\mathfrak{g}$はLie 代数となる。即ち

(i) $[A, B]$は双一次

(ii) $[A, B] = -[B, A]$

(iii) $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$

がみたされる。$\mathfrak{g}$を群GのLie 代数という。

§2. 1 径 数 部 分 群

Lie 群G上の微分可能な曲線

$$\varphi: R\to G, \quad t\to\varphi_t, \quad -\infty<t<\infty,$$

が　$\varphi_t\,\varphi_s = \varphi_{t+s}$，　$t, s\in R$，をみたすとき，φをGの1径数部分群という。明らかに

$$\varphi_0 = e, \quad \varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$$

となり，曲線φ上の点はGのAbel 部分群をつくる。

定理　Lie 群Gの1径数部分群φ_t はLie の基本微分方程式

$$(2,1)\qquad \frac{d\varphi_t}{dt} = \varphi_t A, \quad \varphi_0 = e, \quad A\in\mathfrak{g},$$

によつて特性づけられる。

(証明)　1径数部分群φ_t 上の点$\varphi_0 = e$における接ベクトルを

$$\left.\frac{d\varphi_t}{dt}\right|_{t=0} = A\in\mathfrak{g}$$

とおけば，点φ_t における接ベクトルは

$$\frac{d\varphi_t}{dt} = \left.\frac{d}{ds}\varphi_{t+s}\right|_{s=0} = \frac{d}{ds}(\varphi_t\varphi_s)_{s=0} = \varphi_t\left.\frac{d\varphi_s}{ds}\right|_{s=0} = \varphi_t A$$

で与えられる。即ち(2，1)がみたされる。逆に任意のベクトル$A\in\mathfrak{g}$が与えられたとき，微分方程式(2，1)において，初期条件　$\varphi_0 = e$で定まる解を　$\exp\ tA$　とすれば，(2，1)の一般解は

$$\varphi_t = b\exp\ tA, \quad b\in G: \text{任意定数},$$

で与えられる。これは(2，1)の形から明らかである。したがつて左移動を用いて延ばしていくことにより，解　$\exp\ tA$　はすべての$t\in R$に対して定義され，明らかに

$$\exp(t+s)A = \exp\ tA\cdot\exp\ sA, \quad t, s\in R$$

をみたす。これは　$\exp\ tA$　が1径数部分群であることを示している。即ち点eにおける接ベクトル$A\in\mathfrak{g}$を指定すれば，1径数部分群　$\exp\ tA$　は方程式(2，1)の解として一意的に定まる。

命題1　$\varphi_t = \exp\ tA$，$A\in\mathfrak{g}$，とすれば，

$$\varphi_t A = A\varphi_t = \frac{d\varphi_t}{dt}$$

(証明)　関係式　$\varphi_t\varphi_s = \varphi_{t+s} = \varphi_s\varphi_t$ に微分$(d/ds)_{s=0}$　を施せばよい。

定義　Lie 群Gの任意の元$x\in G$に対して，$\mathfrak{g}$上の一次変換$ad(x)$を

$$ad(x):\mathfrak{g}\to\mathfrak{g},\quad B\to xBx^{-1},\quad B\in\mathfrak{g},$$

で定義し，$\mathfrak{g}$上の一次変換群$ad(G)$をGの随伴群という。

命題2　$\varphi_t=\exp tA,\ A\in\mathfrak{g}$,

とすれば，任意のベクトル$B\in\mathfrak{g}$に対して，

$$\frac{d}{dt}(ad(\varphi_t)B)=[A,ad(\varphi_t)B].$$

特に　$\frac{d}{dt}(ad(\varphi_t)B)_{t=0}=[A,B].$

（証明）$\frac{d}{dt}(\varphi_t B\varphi_{-t})=\frac{d\varphi_t}{dt}B\varphi_{-t}+\varphi_t B\frac{d\varphi_{-t}}{dt}$

$$=A\varphi_t B\varphi_{-t}-\varphi_t B\varphi_{-t}A=[A,ad(\varphi_t)B].$$

この証明はいささか乱暴であつた。しかし，厳密に考えても結局同じことになつてしまう。

§3. Maurer-Cartan 形式

定義　Lie 群GのLie 代数を$\mathfrak{g}$とする。G上の値域$\mathfrak{g}$の1-form ω を

$$\omega:T(G)\to\mathfrak{g},\quad X\to x^{-1}X,\quad X\in T_x(G)$$

で定義し，これをGの Maurer-Cartan form という。

命題1　G上の左不変ベクトル場A^*に対して，

$$\omega(A^*)=A^*_e\equiv A\ (一定)\in\mathfrak{g}$$

（証明）$A^*:x\to xA,\ x\in G$，であるから

$$\omega(A^*)=x^{-1}(xA)=A$$

命題2　元$a\in G$に対して，

$$\omega\circ L_a=\omega,\quad \omega\circ R_a=ad(a^{-1})\omega$$

（証明）　$X\in T_x(G),\ x\in G$，に対して

$$\omega(aX)=(ax)^{-1}aX=x^{-1}X=\omega(X)$$

$$\omega(Xa)=(xa)^{-1}Xa=a^{-1}(x^{-1}X)a$$

$$=ad(a^{-1})\omega(X)$$

定理1　Maurer-Cartan form ω の外微分は，構造方程式

$$(3,1)\quad d\omega=-\frac{1}{2}[\omega,\omega]$$

で与えられる。

（証明）　ここで，記号$[\omega,\omega]$の意味は，双一次写像

$$F:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g},\quad F(A,B)=[A,B]$$

に値域$\mathfrak{g}$の1-form ω を代入して得られる値域$\mathfrak{g}$の2-form を

$$F(\omega,\omega)=[\omega,\omega]$$

と書いたものである　（Ⅰ，§4）。即ち，

$$[\omega,\omega]\ (X,Y)=\frac{1}{2}\{[\omega(X),\omega(Y)]-[\omega(Y),\omega(X)]\}$$

$$=[\omega(X),\omega(Y)],\ X,Y\in T_x(G),\ x\in G,$$

となる。任意のベクトル$A,B\in\mathfrak{g}$をとり，左ベクトル場

$$A^*=x\to xA,\quad B^*:x\to xB,\quad x\in G$$

に対して（3，1）が成り立つことをいえば十分である。公式Ⅰ，（6，6）より

$$d\omega(A^*,B^*)=\frac{1}{2}\{A^*\omega(B^*)-B^*\omega(A^*)-\omega([A^*,B^*])\}$$

が成り立つ。ベクトル場A^*,B^*は左不変であるから$[A^*,B^*]$もまた左不変となり

$$\omega(B^*)=B\ (一定),\quad \omega(A^*)=A\ (一定),$$

$$A^*\omega(B^*)=0,\quad B^*\omega(A^*)=0,$$

$$\omega([A^*,B^*])=[A^*,B^*]_e=[A,B],$$

である。これらを代入すれば

$$d\omega(A^*,B^*)=-\frac{1}{2}[A,B]=-\frac{1}{2}[\omega(A^*),\omega(B^*)]$$

定義　Lie 群G上の値域Vの k-form

$$\theta:T^k(G)\to V\ (有限次元ベクトル空間)$$

が左不変であるとは，任意の元 $a\in G$ に対して

$$\theta\circ L_a=\theta$$

となることである。即ち

$$\theta(aX_1,\cdots\cdots,aX_k)=\theta(X_1,\cdots\cdots,X_k)$$

$$X_1,\cdots\cdots,X_k\in T_x(G),\quad x\in G$$

定理2　Lie 群G上の任意の左不変 k−form θ は，Maurer−Cartan form ω の多項式として与えられる。即ち，対称複一次写像

$$F:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\cdots\cdots\times\mathfrak{g}\to V$$

が一意的に定まり，$\theta=F(\omega,\omega,\cdots\cdots,\omega)$ で与えられる。

（証明）　複一次写像 $F:\mathfrak{g}\times\cdots\cdots\times\mathfrak{g}\to V$ に対して

$$F(\omega,\cdots\cdots,\omega)\circ L_a=F(\omega\circ L_a,\cdots\cdots,\omega\circ L_a)$$
$$=F(\omega,\cdots\cdots,\omega),\quad a\in G$$

よつて $F(\omega,\cdots\cdots,\omega)$ は左不変な form である。

逆を説明しよう。$\mathfrak{g}$ の base (e_λ) をとり Maurer−Cartan form を

$$\omega=\sum_\lambda\omega^\lambda e_\lambda,\qquad \omega^\lambda:\text{実値域 1−form},$$

で表わせば，ω^λ は左不変である。そして，任意の点 $x\in G$ に対して，写像 $\omega:T_x(G)\to\mathfrak{g}$ はベクトル空間の bijection であるから，1−forms $\omega^1,\cdots\cdots,\omega^r$ は一次独立である。したがつてG上の値域Vの任意の k−form θ は

$$\theta=\sum_{1\leq\lambda_1<\cdots\cdots<\lambda_k\leq r}f_{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_k}(x)\,\omega^{\lambda_1}\wedge\cdots\cdots\wedge\omega^{\lambda_k},$$

$f_{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_k}$：値域Vの函数，

の形で表わされる。それゆえもし θ が左不変であれば，任意の元 $a\in G$ に対して

$$f_{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_k}(ax)=f_{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_k}(x),$$

即ち $f_{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_k}$ はG上で定数でなければならない。そこで

$$F(X_1,\cdots\cdots,X_k)=\sum_{1\leq\lambda_1<\cdots\cdots<\lambda_k\leq r}f_{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_k}\xi_1^{\lambda_1}\cdots\cdots\xi_k^{\lambda_k}$$

$$X_i=\sum_\lambda\xi_i^\lambda e_\lambda\in\mathfrak{g},\quad \xi_i^\lambda\in R$$

とおけば，$F:\mathfrak{g}\times\cdots\cdots\times\mathfrak{g}\to V$ は複一次写像となり，form θ は

$$\theta=F(\omega,\cdots\cdots,\omega)$$

で与えられる。更に

$${}^sF(X_1,\cdots\cdots,X_k)=\frac{1}{k!}\sum_\sigma F(X_{\sigma(1)},\cdots\cdots,X_{\sigma(k)})$$

$$\sigma:\{1,\cdots\cdots,k\}\text{の置換},$$

とおけば，${}^sF$ は対称複一次写像で

$$\theta={}^sF(\omega,\cdots\cdots,\omega)=F(\omega,\cdots\cdots,\omega)$$

となる。${}^sF$ の作り方から一意性は明らかである。

§4. 一般線形群

Vを m 次元実ベクトル空間とする。Vの自己準同型全体

$$\mathrm{End}(V)=\{\alpha:V\to V:\ \text{linear}\}$$

は m^2 次元実ベクトル空間をつくり，積 $\alpha\beta=\alpha\circ\beta$ によつて環となる。更に積

$$[\alpha,\beta]=\alpha\beta-\beta\alpha$$

を定義すればLie 代数となる。またVの自己同型全体

$$GL(V)=\{\alpha:V\to V;\ \text{bijection}\}$$

はEnd (V) の開部分多様体で，積 $\alpha\beta$ によつてLie 群となる。Vの base (e_λ) をとり，元 $\alpha\in\mathrm{End}(V)$ に対して

$$\alpha e_\lambda=\sum_\mu\alpha_\lambda^\mu e_\mu,\quad \alpha_\lambda^\mu\in R,\quad \lambda,\mu=1,2,\cdots\cdots,m,$$

とおけば，α は matrix (α_λ^μ) で表わされ，m 次の matrices 全体 End (V) の中で正則 $(\det\neq 0)$ なもの全体がGL (V) である。そして積 $\alpha\beta$ は matrices の積となる。

命題　Vをm次元実ベクトル空間とする。一般線形群GL(V)のLie 代数 $\mathfrak{gl}(V)$は

$$\mathfrak{gl}(V)\cong \mathrm{End}(V)$$

で与えられる。ただし，元$A\in\mathfrak{gl}(V)$に対して，

$$\varphi_t=\exp\ tA,$$

$$Av=\frac{d}{dt}(\varphi_t v)_{t=0},\qquad v\in V,$$

と定義することにより，AをVの自己準同型と見なす。

（証明）　混乱をさけるため

$$\eta(A)\ v=\frac{d}{dt}(\varphi_t v)_{t=0}$$

とおく。$\varphi_t: V\to V$ は一次写像だから$\eta(A)$もまた一次写像である。

即ち$\eta(A)\in\mathrm{End}(V)$。よつて写像

$$\eta:\mathfrak{gl}(V)\to\mathrm{End}(V),\quad A\to\eta(A)$$

がLie 代数の bijection であることを証明すればよい。ηが準同型であることとは定義から容易にわかる。いま

$$\eta(A)=0,\qquad A\in\mathfrak{gl}(V)$$

とすれば，任意のベクトル$v\in V$に対して

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t v)=\frac{d}{ds}(\varphi_{t+s}v)_{s=0}=\varphi_t\ \frac{d}{ds}(\varphi_s v)_{s=0}$$

$$=\varphi_t\,\eta(A)\ v=0$$

よつて$\varphi_t v=v$（一定），即ち　$\varphi_t\equiv 1\!\!1$（恒等変換）である。ゆえに

$$A=\left(\frac{d1\!\!1}{dt}\right)_{t=0}=0$$

となりηは injection である。また任意の元$\alpha\in\mathrm{End}(V)$に対して

$$\varphi_t=1\!\!1+t\alpha+\frac{t^2}{2!}\alpha^2+\frac{t^3}{3!}\alpha^3+\cdots\cdots$$

とおけば，これは$-\infty<t<\infty$において絶対収束で，φ_tはGL(V)の１径数部分群となる。そして

$$\left(\frac{d\varphi_t}{dt}\right)_{t=0}=A\in\mathfrak{g}$$

とおけば　$\eta(A)=\alpha$となる。よつてηは　surjection　である。

（証明終）

任意の接ベクトル

$$X\in T_\sigma(GL(V)),\quad \sigma\in GL(V),$$

は$X=L_\sigma A$，$A\in\mathfrak{gl}(V)$，の形で表わされる。そこで元σ，$A\in\mathrm{End}(V)$に対して，σAを環　End(V)における積とすれば，写像

$$T(GL(V))\to\mathrm{End}(V),\ X\to\sigma A,\ X=L_\sigma A,$$

が得られ，XもまたVの自己準同型σAを表わすものと考えることができる。そして関係式

$$\frac{d\varphi_t}{dt}=\varphi_t A,\quad A\in\mathfrak{gl}(V),\ \varphi_t=\exp\ tA,$$

$$\exp\ tA=1\!\!1+tA+\frac{t^2}{2!}A^2+\cdots\cdots\cdots$$

$$ad(\sigma)\ A=\sigma A\sigma^{-1},\ \sigma\in GL(V),\ A\in\mathfrak{gl}(V),$$

$$[A,B]=AB-BA,\quad A,B\in\mathfrak{gl}(V)$$

などの右辺はいずれも環End(V)における演算を用いて表わしたものと見なしてよい。

§5. 表　現

G, G'をLie 群とし, $h: G\to G'$を微分準同型とする。hからの誘導写像も同じ文字 $h: T(G)\to T(G')$で表わす。明らかに次の関係式が成立する。

$$h(ab)=(ha)(hb),\quad a,\ b\in G,$$
$$h(aY)=(ha)(hY),\quad h(Xb)=(hX)(hb),$$
$$h(ad(a)A)=ad(ha)hA,$$
$$h(\exp tA)=\exp t(hA),\qquad X,\ Y\in T(G),\ A\in\mathfrak{g}$$

命題　Lie 群G, G'の準同型$h: G\to G'$からこれらのLie 代数$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$の準同型 $\bar{h}: \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$が引き起される。ここに, $\bar{h}$は元$A\in\mathfrak{g}$に対して$\varphi_t=\exp tA$とおいて,

$$\bar{h}(A)=hA=\frac{d}{dt}(h\varphi_t)_{t=0}\in\mathfrak{g}'$$

で定義される。

（証明）　接ベクトル空間$\mathfrak{g}=T_e(G)$, $\mathfrak{g}'=T_e(G')$ に対して, 誘導写像 $h: \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$は linearである。元$A$, $B\in\mathfrak{g}$に対して$\varphi_t=\exp tA$とすれば

$$h(ad(\varphi_t)B)=ad(h\varphi_t)(hB)$$

である。これに微分$(d/dt)_{t=0}$を施せば

$$\bar{h}[A,B]=[hA,hB]$$

を得る。よつて$h: \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$はLie 代数の準同型である。

（証明終）

元$a\in G$による群Gの内部自己同型

$$h_a: G\to G,\qquad x\to axa^{-1},\ x\in G,$$

からの誘導写像が

$$\bar{h}_a=ad(a): \mathfrak{g}\to\mathfrak{g},\ A\to aAa^{-1},\ A\in\mathfrak{g},$$

であつた。これはLie 代数$\mathfrak{g}$の自己同型となるから, 公式

$$ad(a)[A,B]=[ad(a)A,\ ad(a)B],\ A,\ B\in\mathfrak{g},$$

が成り立つことがわかる。

Vを有限次元ベクトル空間とし, $GL(V)$をV上の一般線形群とする。

Lie 群Gに対して, 微分可能準同型 $\rho: G\to GL(V)$ をGの表現という。これよりLie代数の準同型$\bar{\rho}: \mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$
が引き起される。これをρからの誘導表現という。特にLie 群GのLie 代数$\mathfrak{g}$上の表現

$$ad: G\to GL(\mathfrak{g}),\ x\to ad(x),\ x\in G$$

をGの随伴表現という。これの誘導表現は

$$\overline{ad}: \mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),\ \overline{ad}(A)B=[A,B],\ A,\ B\in\mathfrak{g}$$

で与えられる。

実際$\varphi_t=\exp tA$とおけば

$$\overline{ad}(A)B=\frac{d}{dt}(ad(\varphi_t)B)_{t=0}=[A,B]$$

となる（§2, 命題2）

Gをベクトル空間Vの一次変換群として, injection

$$\rho: G\to GL(V),\quad \sigma\to\sigma,$$

をGの表現と考える。このときVの元を反変ベクトルと呼ぶ。ρから次のような他の表現が導かれる。先ずVの双対空間をV^*とし, 元$\sigma\in G$の転置写像を${}^t\sigma$とする。即ち

$$\langle {}^t\sigma v',\ v\rangle=\langle v',\ \sigma v\rangle,\quad v'\in V^*,\quad v\in V,$$

である。そこでGの表現

$$\rho^*: G\to GL(V^*),\ \sigma\to\sigma^*={}^t\sigma^{-1}$$

が得られる。このときV^*の元を共変ベクトルという。また

$$\rho_0: G\to GL(R),\quad \sigma\to 1\ (\text{恒等変換})$$

とする。このときRの元をスカラーという。更に

$$V^k_l=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{k\text{個}}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{l\text{個}}\ (\text{テンソル積})$$

$$\sigma^k_l=\underbrace{\sigma\otimes\cdots\otimes\sigma}_{k\text{個}}\otimes\underbrace{\sigma^*\otimes\cdots\otimes\sigma^*}_{l\text{個}}$$

とおいて, 表現

$$\rho^k_l: G\to GL(V^k_l),\quad \sigma\to\sigma^k_l$$

を得る。このときV^k_lの元を$(k,\ l)$−テンソルという。特に

$$V=V^1_0,\quad V^*=V^0_1,\quad R=V^0_0$$

である。あるいは

$$V^{[k]}=\wedge^k(V),\ V_{[k]}=\wedge^k(V^*)\quad(外積)$$

$$\sigma^{[k]}=\underbrace{\sigma\wedge\cdots\cdots\wedge\sigma}_{k個},\ \sigma_{[k]}=\underbrace{\sigma^*\wedge\cdots\cdots\wedge\sigma^*}_{k個}$$

とおいて，表現

$$\rho^{[k]}: G\to GL(V^{[k]}),\quad \sigma\to\sigma^{[k]}$$

$$\rho_{[k]}: G\to GL(V_{[k]}),\quad \sigma\to\sigma_{[k]}$$

を得る。このとき$V^{[k]}$，$V_{[k]}$の元は反変あるいに共変な外k－ベクトルと呼ばれ，これらは歪対称な（k，o）あるいは（o，k）－テンソルと見なすことができる。

またV内に体積の単位が指定されているとき，整数wに対して

$${}^w\rho_0: G\to GL(R),\ \sigma\to(\det\sigma)^w,$$

とする。このときRの元を重さwのスカラー密度と呼ぶ。更に

$${}^w\rho^k_l: G\to GL(V^k_l),\ \sigma\to(\det\sigma)^w\ \sigma^k_l$$

とする。このときV^k_lの元を重さwの（k，l）－テンソルという。

これらの表現からの誘導表現を求めよう。それにはσの代りに1径数部分群$\varphi_s=\exp sA$をおきかえて微分$(d/ds)_{s=o}$を施せばよい。容易に次の結果が得られる。

$$\bar\rho\ :\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V),\qquad A\to A,$$

$$\bar\rho^*:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V^*)\qquad A\to -{}^tA$$

$$\bar\rho_0\ :\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(R)\qquad A\to O,$$

$$\bar\rho^k_l\ :\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V^k_l)$$

$$A\to\Big(\sum_{i=1}^{k}\mathbb{1}\otimes\cdots\underset{\substack{\uparrow\\ i番目}}{A}\cdots\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}^*_l-\sum_{j=1}^{l}\mathbb{1}_k\otimes\mathbb{1}^*\otimes\cdots\underset{\substack{\uparrow\\ j番目}}{A}\cdots\otimes\mathbb{1}^*\Big)$$

$$\mathbb{1}^*_l=\underbrace{\mathbb{1}^*\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}^*}_{l個},\ \mathbb{1}_k=\underbrace{\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}}_{k個},$$

$${}^w\bar\rho_0:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(R),\qquad A\to w(\mathrm{Tr}A)\mathbb{1},$$

$${}^w\bar\rho\ :\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)\qquad A\to A+(w(\mathrm{Tr}A))\mathbb{1}.$$

（Tr：　trace）

一般に${}^w\bar\rho^k_l$も同様であるが式が長くなるので省略する。

§6. 変換群

定義　GをLie群，Fを微分多様体とする。微分写像

$$\eta: G\times F\to F,\ (a,y)\to ay$$

が指定され，条件

（i）$ey=y$，$y\in F$，　eは恒等元，

（ii）$a(by)=(ab)y$，　$a,b\in G$，$y\in F$，

をみたすとき，GをF上の左変換群という。このとき写像ηをGの作用という。

また条件（ii）の代りに

（ii）* $a(by)=(ba)y$

をみたすとき，GをF上の右変換群という。この場合には作用を

$$\eta^*: F\times G\to F,\ (y,a)\to ya$$

と書くことにすれば，上の条件は

（i）* $ye=y$，

（ii）* $(ya)b=y(ab)$，

となつて都合がよい。以下左右同様のときは一方だけについて述べる。そして簡単に$\{G,F,\eta\}$で表わすことがある。

変換群$\{G,F,\eta\}$において，元$a\in G$を固定すれば，写像

$$\eta_a: F\to F,\quad y\to ay,\quad y\in F,$$

を得る。η_aはFの微分同型で

$$\eta_e=\mathbb{1}\ （恒等変換），\ \eta_a\circ\eta_b=\eta_{ab},\ \eta_a^{-1}=\eta_{a^{-1}}$$

となる。変換群GがF上に可動的であるとは，任意の二点x，$y\in F$に対して，$ax=y$となる元$a\in G$が存在することであり，更にこのaが一意的に定まるとき，単純可動的であるという。

Lie 群Gの左移動L_aまたは右移動R_aを考えると，この作用L，RによつてGはG上の変換群となり，これらはどちらも単純可動的である。逆に単純可動的な変換群$\{G, F, \eta\}$は本質的にこれらと同じものと考えられる。実際点$y_0 \in F$をとれば，写像

$$\varphi : G \to F,\ x \to xy_0, \quad x \in G,$$

は微分同型で，作用η_a，$a \in G$，に対して

$$\varphi \circ L_a = \eta_a \circ \varphi$$

となるからである。それゆえ任意に一点$y_0 \in F$を指定すれば

$$\varphi : G \cong F, \quad e \leftrightarrow y_0$$

と見なすことができる。このようなFをGの群多様体といい，Fの点を標構と呼ぶ。たとえば，ベクトル空間Vの bases 全体は一般線形群GL(V)の群多様体となり，直交 bases 全体は直交群O(V) の群多様体となる。

Lie 群Gの閉部分群Hをとる。GのHによる左 coset で，元$a \in G$を含むものを

$$\bar{a} = aH = \{ah ; h \in H\}$$

で表わす。二点a，$b \in G$に対して，$\bar{a} = \bar{b}$であるための条件は，$b = ah$となる元$h \in H$が存在することである。GのHによる左 cosets 全体をG／Hで表わし，自然射影を

$$\pi : G \to G/H,\ a \to \bar{a},\ a \in G$$

とする。πが開微分写像となるように，G／H上の位相および微分構造を定めることができて，G／Hは微分多様体となる。このG／HをGの等質空間という。いまG／H上にGの作用を

$$L : G \times G/H \to G/H,\ (a, \bar{b}) \to \overline{ab}$$

で定義すれば，これは矛盾なく定まり，GはG／H上の可動的な左変換群となる。逆に可動的な変換群$\{G, F, \eta\}$は本質的にこれと同じものと考えられる。実際，点$y_0 \in F$をとれば，点y_0を動かさないGの元全体

$$H = \{a \in G ; ay_0 = y_0\}$$

はGの閉部分群をつくり，写像

$$\varphi : G/H \to F,\ \bar{x} = xH \to xy_0,\ x \in G,$$

は微分同型で，作用η_a，$a \in G$，に対して，

$$\varphi \circ L_a = \eta_a \circ \varphi$$

となるからである。それゆえ，任意に一点$y_0 \in F$を指定すれば

$$\varphi : G/H \cong F, \quad \bar{e} = H \leftrightarrow y_0$$

と見なすことができる。なお，F上の他の点$z_0 \in F$を指定し，$z_0 = cy_0$なる元$c \in G$を

とれば，点z_0を動かさないGの部分群は

$$c^{-1}Hc = \{a \in G ; az_0 = z_0\}$$

で与えられる。

変換群Gの作用$\eta : G \times F \to F$からの誘導写像

$$\eta : T(G) \times T(F) \to T(F),\ (X, Y) \to Xy + xY$$
$$X \in T_x(G),\ Y \in T_y(F)$$

をとれば，Lie 群T(G)はT(F)上の変換群となる。明らかに

$$(ab)y = a(by), \quad a, b \in G,\ y \in F,$$
$$(ab)Y = a(bY), \quad (aX)y = a(Xy),$$
$$(Xb)y = X(by), \quad X \in T(G),\ Y \in T(F),$$

が成り立つ。

変換群$\{G, F, \eta\}$において，Lie 群Gの1径数部分群

$$\varphi_t = \exp tA,\ A \in \mathfrak{g},$$

をとれば，F上の1径数変換群

$$\varphi : R \times F \to F,\ (t, y) \to \varphi_t y$$

を得る。一方，F上のベクトル場

$$A^+ : y \to Ay,\ y \in F,$$

をとれば，これがφの無限小変換（I，§5）である。なぜなら，任意の点$y \in F$に対して

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t y) = \left(\frac{d\varphi_t}{dt}\right) y = (A\varphi_t)\, y$$
$$= A(\varphi_t y) = A^+_{\varphi_t y}$$

となるからである。特にLie 群G上の左または右移動についていえば次の通りである。

命題　Lie 群Gの1径数部分群$\varphi_t = \exp tA$，$A \in \mathfrak{g}$，に対して，1径数左移動群L_{φ_t}の無限小変換は右不変ベクトル場

$$A^+ : y \to Ay,\ y \in G$$

である。そして，1径数右移動群R_{φ_t}の無限小変換は左不変ベクトル場

$$A^* : x \to xA,\ x \in G$$

である。

III　ファイバー・バンドル

§1. 主バンドル

定義　次のような体系$\{P, M, G, \pi, \xi\}$を（微分可能な）主バンドルという。P，Mは微分多様体，GはLie 群で，πは

$$\pi: P \to M : \text{onto}\ 微分写像,$$

である。また，GはP上の右変換群で，その作用を

$$\xi: P \times G \to P,\ (p, a) \to pa,$$

とする。これらは次の条件をみたす。

(i) 二点$p, q \in P$において，$\pi p = \pi q$のときかつそのときに限り$pa = q$となる元$a \in G$が存在し，このaは一意的に定まる。

(ii) 任意の点$x \in M$に対して，xの近傍$U \subset M$および微分写像$s: U \to P$が存在して$\pi \circ s = \mathbb{1}$（恒等写像）となる。

主バンドル$\{P, M, G, \pi, \xi\}$を簡単にバンドル$P(M, G)$，あるいはM上のG－バンドルPなどと呼ぶ。Pを全空間，Mを底空間，Gを構造群，πを射影，ξを右作用という。点$x \in M$に対して

$$G_x = \pi^{-1}(x) = \{p \in P;\ \pi p = x\}$$

を点x上のファイバーという。元$a \in G$を固定して，微分同型

$$R_a: P \to P,\ p \to pa,\quad p \in P$$

を右移動という。条件(i)より

$$\pi \circ R_a = \pi,\quad a \in G,$$

即ち点$x \in M$に対して，R_aは微分同型

$$R_a: G_x \to G_x,\ p \to pa,\ p \in G_x$$

であつて，変換群Gは各ファイバーG_x上に単純可動的に作用する。それゆえG_xはGの群多様体となる。即ち点$p \in G_x$を指定すれば，微分同型

$$\xi_p: G \to G_x,\ a \to pa,\ a \in G$$

を得る。（ξ_p^{-1}も微分可能としておく。）これは許容写像と呼ばれ，特に$\xi_p: e \to p$であ

つて，

$$R_b \circ \xi_p = \xi_p \circ R_b,\quad b \in G$$

をみたす。

微分写像$\sigma: M \to P$で，$\pi \circ \sigma = \mathbb{1}$となるものをバンドル$P(M, G)$の section という。これは一般には存在しない。しかし局所的には section が存在することを条件(ii)で保証している。バンドル$P(M, G)$において，条件(ii)から，Mの適当な開被覆$\{U_i\}_{i \in I}$をとれば，各U_i上に local section

$$s_i: U_i \to P,\quad \pi \circ s_i = \mathbb{1},$$

が存在するようにできる。このとき点$x \in U_i \cap U_j$, $i, j \in I$, に対して，条件(i)から

$$s_j(x) = s_i(x)\, g_{ij}(x)$$

となる元$g_{ij}(x) \in G$が一意的に定まり，写像

$$g_{ij}: U_i \cap U_j \to G,\ x \to g_{ij}(x)$$

は微分可能である。この写像系$\{g_{ij}\}_{i, j \in I}$をMの開被覆$\{U_i\}_{i \in I}$内での転移函数という。記号的に

$$g_{ij}(x) = s_i(x)^{-1}\, s_j(x)$$

と書けば便利なことが多い。

定理1　Mの開被覆$\{U_i\}_{i \in I}$内での転移函数$\{g_{ij}\}_{i, j \in I}$は，条件

(a) $g_{ii}(x) = e,\quad x \in U_i,$

(b) $g_{ij}(x)\, g_{jk}(x) = g_{ik}(x),\ x \in U_i \cap U_j \cap U_k$

によつて特性づけられる。即ち，転移函数は(a)，(b)をみたし，逆に(a)，(b)をみたす微分写像系

$$\{g_{ij}\}_{i, j \in I},\quad g_{ij}: U_i \cap U_j \to G$$

が与えられれば，これを転移函数とする主バンドル$P(M, G)$が存在する。

（証明）　バンドル$P(M, G)$において，転移函数$\{g_{ij}\}_{i, j \in I}$を定める local sections を$\{U_i, s_i\}_{i \in I}$とすれば，

$$s_i(x) = s_i(x)\, g_{ii}(x),\ x \in U_i$$

であるから$g_{ii}(x) = e$を得る。また

$$s_i(x)\, g_{ij}(x)\, g_{jk}(x) = s_j(x)\, g_{jk}(x)$$
$$= s_k(x) = s_i(x)\, g_{ik}(x)$$

であるから $g_{ij}(x)g_{jk}(x)=g_{ik}(x)$ が成り立つ。なおこれらは記号

$$g_{ij}(x)=s_i(x)^{-1}s_j(x)$$

を使えば自明である。

次に逆を証明する。条件（a），（b）より

(c) $g_{ji}(x)=g_{ij}(x)^{-1}, \ x\in U_i\cap U_j$

が成り立つ。いま空間

$$E=\bigcup_{i\in I} U_i\times G$$ （位相空間の和）

をつくり，E上に次の関係 r をいれる。即ち

$$r: U_i\times G\ni(x,a)\sim(x,g_{ij}(x)a)\in U_j\times G,$$
$$x\in U_i\cap U_j,\ i,j\in I,$$

条件（a），（b），（c）より，rは同値関係である。空間Eのrによる商空間を

$P=E/r$ （関係～で結ばれる点を同一視）

とすれば，Pは微分多様体となる。そして射影πおよび元$b\in G$による右移動R_bをそれぞれ

$$\pi: P\to M,\ (x,a)\to x,$$
$$R_b: P\to P,\ (x,a)\to(x,ab)$$

で定義すれば，P（M，G）は主バンドルとなり，各U_i上の local section

$$s_i: U_i\to P,\ x\to(x,e),\ x\in U_i$$

をとれば，$\{U_i,s_i\}_{i\in I}$から定まる転移函数は始めに与えられた$\{g_{ij}\}_{i,j\in I}$と一致する。

定義 M上の二つのG－バンドルP，P'に対して，微分同型$\varphi: P\to P'$が存在して

$$\pi\circ\varphi=\pi,\ R_a\circ\varphi=\varphi\circ R_a,\ a\in G,$$

をみたすとき，この二つのバンドルは同型であるといい，記号

$$P(M,G)\cong P'(M,G)$$

で表わす。実際，写像φによってPとP'とを同一視すれば，これらは同じバンドル構造をもつものと考えられる。

定理2　主バンドルP（M，G），P'（M，G）において，Mの開被覆$\{U_i\}_{i\in I}$内での転移函数をそれぞれ

$$\{g_{ij}\}_{i,j\in I},\ \{g'_{ij}\}_{i,j\in I}$$

とする。このとき，$P\cong P'$であるための条件は微分写像系

$$\{\lambda_i\}_{i\in I},\quad \lambda_i: U_i\to G$$

が存在して次の関係をみたすことである。

$$(1,1)\quad g'_{ij}(x)=\lambda_i(x)^{-1}g_{ij}(x)\lambda_j(x),\ x\in U_i\cap U_j$$

（証明）　先ず，$\varphi: P\to P'$をバンドル同型とする。適当な local sections $\{U_i,s_i\}_{i\in I}$，$\{U_i\ s'_i\}_{i\in I}$ をとれば，

$$s_j(x)=s_i(x)g_{ij}(x),\quad s'_j(x)=s'_i(x)g'_{ij}(x),\quad x\in U_i\cap U_j$$

となるから，バンドルの条件（i）より，点$x\in U_i$に対して

$$s'_i(x)=(\varphi s_i(x))\lambda_i(x)$$

となる元$\lambda_i(x)\in G$が一意的に定まり，写像

$$\lambda_i: U_i\to G,\quad x\to\lambda_i(x),\quad x\in U_i,$$

は微分可能である。そして

$$g'_{ij}(x)=s'_i(x)^{-1}s'_j(x)$$
$$=\lambda_i(x)^{-1}s_i(x)^{-1}\varphi^{-1}\varphi s_j(x)\lambda_j(x)$$
$$=\lambda_i(x)^{-1}g_{ij}(x)\lambda_j(x),\quad x\in U_i\cap U_j.$$

逆に，$\{\lambda_i\}_{i\in I}$が与えられると，点$x\in U_i$に対して写像

$$\varphi_i: G_x\to G'_x,\quad s_i(x)\lambda_i(x)a\to s'_i(x)a,\ a\in G$$

は微分同型となり，点$x\in U_i\cap U_j$において$\varphi_i=\varphi_j$である。よって大域的な微分同型

$$\varphi: P\to P',\ p\to\varphi_i p,\quad p\in G_x,\ x\in U_i$$

が定まり，これはバンドル同型である。　（証明終）

特に$\lambda_i(x)=e$，$i\in I$，の場合を考えることにより，転移函数を指定すれば，主バンドルは同型を除いて一意的に定まることがわかる。

なお，バンドルP（M，G）において，M内の近傍U上の local section は一般に沢山ある。Mの開被覆$\{U_i\}_{i\in I}$に対して，local sections $\{U_i,s_i\}_{i\in I}$のとり方を変えれば，転移函数も変るであろう。その変り方も（1，1）で与えられる。この場合，$\varphi=\mathbb{1}$（恒等写像）と思えばよい。

次にMの開被覆を変えることを考える。Mの二つの開被覆

$$\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in I},\quad \mathfrak{V}=\{V_k\}_{k\in K}$$

において，対応$\tau: K\to I$が存在して

$$U_{\tau k}\supset V_k,\quad k\in K$$

となるとき，$\mathfrak{V}$を$\mathfrak{U}$の細分といい，記号$\mathfrak{U}\succ\mathfrak{V}$で表わす。Mの開被覆の間の関係$\succ$は次の条件をみたす。

(i) $\mathfrak{U}\succ\mathfrak{U}$

(ii) $\mathfrak{U}\succ\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}\succ\mathfrak{W}$ ならば $\mathfrak{U}\succ\mathfrak{W}$

(iii) 二つの$\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}'$に対して $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}'\succ\mathfrak{V}$なる$\mathfrak{V}$が存在する。

条件（i），（ii）は明らかである。（iii）は

$$\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in I},\quad \mathfrak{U}'=\{U'_j\}_{j\in J}$$

に対して，たとえば $\mathfrak{W}=\{U_i\cap U'_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ とすればよい。

さて，主バンドルP（M，G）において，Mの開被覆$\{U_i\}_{i\in I}$内での転移函数を$\{g_{ij}\}_{i,j\in I}$とする。任意の細分

$$\mathfrak{V}=\{V_k\}_{k\in K},\quad \tau: K\to I,\quad U_{\tau k}\supset V_k,\quad k\in K$$

をとり，

$$g'_{kh}(x)=g_{\tau k,\tau h}(x)\ ;\quad x\in V_k\cap V_h,\quad k,h\in K$$

とおけば，$\{g'_{kh}\}_{k,h\in K}$ は$\mathfrak{V}$内での転移函数となる。そしてこれもまたG－バンドルP（M，G）を定めるものである。転移函数$\{g'_{kh}\}$を$\{g_{ij}\}$の$\mathfrak{V}$内への制限という。

結局，次の結果が得られる。

定理３　M上の二つの開被覆$\mathfrak{U}$，$\mathfrak{U}'$内にそれぞれ転移函数$\{g\}$，$\{g'\}$が指定されたとする。これらがM上の同じG－バンドル構造を定めるための必要十分条件は，$\mathfrak{U}$，$\mathfrak{U}'$の共通の細分$\mathfrak{V}$が存在して，$\{g\}$，$\{g'\}$を$\mathfrak{V}$内へ制限したとき，定理２の条件がみたされることである。

以上で主バンドルはどんな構造をもつものであるかが明らかになつた。このバンドル構造に関してはⅥ，§２においてもつと一般的な立場から述べられるであろう。

同一のM，Gに対しても，M上のG－バンドル構造は一般に沢山ある。特にtrivialなものとして位相積

$$P=M\times G$$

が考えられる。この場合，射影πおよび元$b\in G$に対する右移動R_bはそれぞれ

$$\pi: M\times G\to M,\quad (x,a)\to x,$$

$$R_b: M\times G\to M\times G,\quad (x,a)\to(x,ab)$$

で定義される。このときM×Gを積バンドルという。

定理４　主バンドルP（M，G）が

$$P(M,G)\cong M\times G$$

であるための必要十分条件は，大域的な section

$$f: M\to P,\quad \pi\circ f=1,$$

が存在することである。

（証明）　積バンドルにおいて，写像

$$f: M\to M\times G\ ;\quad x\to(x,e),\quad x\in M,$$

はたしかに section である。

逆に，section $f: M\to P$に対して，写像

$$\varphi: M\times G\to P,\quad (x,a)\to f(x)a$$

はバンドル同型である。　（証明終）

なお，積バンドルは転移函数

$$g_{ij}(x)=e,\quad i,j\in I,\quad x\in U_i\cap U_j,$$

で定まるバンドル構造である。即ち，大域的な section fを各U_iに制限したものをs_iとすれば

$$g_{ij}(x)=s_i(x)^{-1}s_j(x)=f(x)^{-1}f(x)=e$$

となる。

一般の主バンドルP（M，G）も局所的には積バンドルと考えられる。即ち，任意の点$x_0\in M$の近傍U上の local section $s: U\to P$をとれば，写像

$$\varphi: U\times G\to\pi^{-1}(U)\ ;\quad (x,a)\to s(x)a,$$

は局所的なバンドル同型である。

§2. 同伴バンドル

定理　P（M，G）を主バンドル，$\{G,F,\eta\}$を変換群とすれば，次の条件をみたす多様体Bおよび onto 微分写像

$$\chi: P\times F\to B\qquad (p,y)\to py,$$

が一意的に定まる。

(i) $(pa)y=p(ay)$, $p\in P$, $a\in G$, $y\in F$

(ii) $py=p'y'\in B$, $p,p'\in P$, $y,y'\in F$, ならば，

元 $a\in G$ が存在して $p'=pa$, $y=ay'$,

（証明）　先ず存在を証明する。空間P×F上に同値関係

$$r:(p,y)\sim(pa,a^{-1}y),\quad a\in G,$$

をいれて，P×Fのrによる商空間を

$$B=P\times_G F$$

とし，自然射影を $\chi: P\times F\to B$ とすればよい。

次に一意性を証明する。二通りの $\{B,\chi\}$, $\{B',\chi'\}$ があつたとする。写像

$$\varphi: B\to B',\ \chi(p,y)\to\chi'(p,y),\ p\in P,\ y\in F$$

を考えれば，条件（ⅰ），（ⅱ）より微分同型 φ が矛盾なく定まり

$$\varphi\circ\chi=\chi'$$

である。即ち $\{B,\chi\}$, $\{B',\chi'\}$ は φ によつて同一視できる。（証明終）

このような $\{B,\chi\}$ をファイバー・バンドルといい，簡単に

B（M，F，G）

と書くことがある。Bを全空間，Mを底空間，Fを標準ファイバー，Gを構造群という。また写像 $\chi: P\times F\to B$ を主写像，PをBの同伴主バンドルという。

群Gの左移動群 $\{G, G, L\}$ を考えることにより，主バンドルP（M，G）自身は群多様体Gを標準ファイバーとするファイバー・バンドルである。この場合右作用

$$\xi: P\times G\to P,\ (p,b)\to pb,$$

が主写像である。既に知られているように

$$(pa)b=p(ab),\quad p\in P,\ a,\ b\in G,$$

が成り立つ。また $pb=p'b'$ のとき，元 $a=bb'^{-1}$ をとれば，$p'=pa$, $b=ab'$ である。

ファイバー・バンドルB（M，F，G）の同伴主バンドルをP，その射影を $\pi: P\to M$ とすれば，バンドルBの射影は

$$\pi': B\to M,\ py\to\pi(p),\quad p\in P,\ y\in F$$

で定義される。点 $x\in M$ に対して，集合

$$F_x=\pi'^{-1}(x)\subset B$$

を点 x 上のファイバーと呼ぶ。主バンドルP上の点 $p\in G_x$ を固定すれば，条件（ⅱ）より，微分同型

$$\chi_p: F\to F_x,\quad y\to py,\quad y\in F,$$

が定まる。これを許容写像という。

バンドルB（M，F，G）の同伴主バンドルが積バンドル

$$P(M,G)\cong M\times G$$

であるとき，Bを積バンドルという。実際，Bは位相積

$$B\cong M\times F,\quad py\to(x,ay),\quad p=(x,a)$$
$$x\in M,\quad a\in G,\quad y\in F$$

として与えられる。一般の主バンドルは局所的には積バンドルとなるから，どんなファイバー・バンドルでも局所的には積バンドルと考えられる。即ち，同伴主バンドルの local section

$$s: U\to P,\quad U\subset M$$

をとれば，写像

$$\varphi: U\times F\to\pi'^{-1}(U)\subset B,\ (x,y)\to s(x)y$$

は局所的な微分同型である。

バンドルB（M，G，F）においても，微分写像

$$f: M\to B,\quad \pi'\circ f=\mathbb{1}$$

を section という。大域的な section は必ずしも存在しない。しかし，バンドルが局所的には積バンドルとなることから，local section は必ず存在する。

定義　同伴主バンドルが同じであるような二つのファイバーバンドルB（M，F，G），B'（M，F'，G）はたがいに同伴であるという。

§3. 接バンドル

Mを n 次元微分多様体とする。点 $x\in M$ における接ベクトル空間を $T_x(M)$ とし，$T_x(M)$ 内の bases 全体を G_x とする。

$$T(M)=\bigcup_{x\in M}T_x(M),\quad P=\bigcup_{x\in M}G_x$$

とおけば，これらはM上のファイバー・バンドルとなり，T（M）の同伴主バンドルがPである。これを説明しよう。先ず射影

$$\pi: P\to M,\quad \pi': T(M)\to M$$

はそれぞれ

$$\pi^{-1}(x)=G_x,\quad \pi'^{-1}(x)=T_x(M),\quad x\in M$$

で定まる。R^n を n 次元実数空間とし，GL (n) を R^n 上の一般線形群とする。即ちGL (n) は n 次の正則（det≠o） 行列全体の群である。GL (n) はP上の右変換群となり，その作用は

$$\xi : P\times GL(n) \to P$$

$$(p, a) \to pa = (e_1, \cdots\cdots, e_n)\ (a^{\lambda}_{\mu}),$$

$$p = (e_1, \cdots\cdots, e_n) \in P,\quad a = (a^{\lambda}_{\mu}) \in GL(n)$$

で与えられる。これが主バンドルPの右作用となる。また，任意の点 $x_0 \in M$ に対して，x_0 の近傍Uにおける局所座標 (x^{λ}) をとれば，local section

$$s : U \to P,\quad x \to \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots\cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right),\quad x \in U,$$

が存在している。この section s は局所座標 (x^{λ}) に関する自然標構と呼ばれている。このようにして

$$P = P(M, GL(n))$$

が主バンドルとなることがわかり，これをM上の接標構バンドルという。Mを局所座標 $\{U_i\}_{i\in I}$ で被覆し，各 U_i 上の自然標構

$$s_i : U_i \to P,\quad i \in I$$

をとる。近傍 U_i，U_j における局所座標をそれぞれ (x^{λ})，(x'^{λ}) とすれば，点 $x \in U_i \cap U_j$ における自然標構は関係

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}} = \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}},\quad s_j(x) = s_i(x)\, g_{ij}(x)$$

で結ばれている。よつて転移函数は

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(n),\quad x \to \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}}\right)_x$$

で与えられる。この $\{g_{ij}\}_{i,j\in I}$ が接標構バンドルの構造を定めるものである。

次に，T (M) に対しては，主写像を

$$\chi : P\times R^n \to T(M),\quad (p, y) \to py = \sum_{\lambda} e_{\lambda} y^{\lambda},$$

$$p = (e_{\lambda}) \in P,\quad y = (y^{\lambda}) \in R^n,$$

で定義すれば，明らかに

$$(pa)\,y = p\,(ay),\quad a \in GL(n)$$

がみたされ

$$T(M) = T(M, R^n, GL(n))$$

はファイバー・バンドルとなる。これがMの接ベクトル・バンドルである。

更に，ベクトル空間 $V = R^n$ から導かれる（r，s）−テンソル空間 V^r_s をとれば，GL (n) は V^r_s 上の変換群と考えられるから（Ⅱ，§5），V^r_s を標準ファイバーとするT (M) の同伴バンドルをつくることができる。これをMの（r，s）−テンソル・バンドルという。外k−ベクトル・バンドルも同様である。

§4. 等質空間とファイバー・バンドル

既に述べて来たように，ファイバー・バンドルは次のような作用を組合わせることによつて構成されている。

η_0 : G×G→G；群

η : G×F→F；左変換群

ξ : P×G→P；主バンドル（右作用）

χ : P×F→B；ファイバー・バンドル（主写像）

これらの作用はいずれも積の形

$$(x, y) \to xy$$

で表わした。そしていずれも結合律

$$(xy)\,z = x\,(yz)$$

をみたしている。なお，これらの作用はMの点を動かさない。

$$\begin{tikzcd}
 & G\times G \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
P\times G \arrow[dr] \arrow[d, dash] & & G\times F \arrow[dl] \\
M \arrow[dr, equal] & P\times F \arrow[r] \arrow[d, dash] & B \arrow[d, dash] \\
 & M \arrow[r, equal] & M
\end{tikzcd}$$

この状況を考慮して，等質空間に関連するファイバー・バンドルの例をいくつか示そう。

先ず，GをLie群，HをGの閉部分群として，等質空間G／Hをとれば，

$$G = G\,(G/H, H)$$

は主バンドルとなる。即ちG上の同値関係

$$a \sim ah,\quad h \in H$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, dash, "H"] \\
G/H
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{l} a \sim ah \\ h \in H \end{array}$$

による商空間がG／Hであつて，自然射影は

$$\tau_0 : G \to G/H, \quad a \to \bar{a} = aH, \quad a \in G,$$

である。いま群Gの作用

$$\eta_0 : G\times G \to G, \quad (a, b) \to ab$$

において，右移動をHの元だけに制限すれば，写像

$$\xi_0 : G\times H \to G, \quad (a, h) \to ah$$

が得られ，このξ_0を右作用としてG（G／H，H）は主バンドルとなる。なお， local section の存在は保証されている。（たとえば，Chevalley : Theory of Lie groups I，110 頁，参照）

また，群Gの作用η_0において右移動をHで割れば，即ち関係

$$a \sim ah, \quad h \in H$$

によるGの商空間をとれば，写像

$$\begin{array}{llll} \eta_0 : G\times G & \longrightarrow & G, & (a, b) \to ab \\ \quad\quad \downarrow \tau_0 & & \downarrow \tau_0 & \\ \eta\ : G\times G/H & \to & G/H, & (a, \bar{b}) \to a\bar{b} = \overline{ab} \end{array}$$

が得られ，$\{G, G/H, \eta\}$は左変換群である（Ⅱ，§6）。

さて，P（M，G）を主バンドルとし，HをGの閉部分群とする。空間P上に同値関係

$$P \sim ph, \quad h \in H$$

をいれて，この商空間をP／Hとすれば，自然射影は

$$G\left(\begin{array}{c} P \\ \big\downarrow H \\ P/H \\ \big\downarrow G/H \\ M \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} p \sim ph \\ h \in H \end{array}$$

$$\tau : P \to P/H, \quad p \to \bar{p} = pH = \{ph \ ; \ h \in H\}$$

で与えられる。主バンドルP（M，G）の右作用

$$\xi : P\times G \to P, \quad (p, a) \to pa$$

をHの元だけに制限すれば，写像

$$\xi_H : P\times H \to P, \quad (p, h) \to ph$$

が得られ，このξ_Hを右作用と見るとき

$$P = P\,(P/H, H)$$

は主バンドルとなる。

また，P（M，G）の右作用ξをHで割れば，即ち同値関係

$$p \sim ph, \quad h \in H$$

によるPの商空間をとれば，写像

$$\begin{array}{llll} \xi : P\times & G & \to\ P, & (p, a) \to pa \\ & \downarrow \tau_0 & \ \ \downarrow \tau & \\ \chi : P\times & G/H & \to P/H, & (p, \bar{a}) \to p\bar{a} = \overline{pa} \end{array}$$

が得られ，このχを主写像と見るとき

$$P/H = P/H\,(M, G/H, G)$$

はファイバー・バンドルとなる。これはP（M，G）を同伴主バンドル，G／Hを標準ファイバーとし，左変換群$\{G, G/H, \eta\}$によつて定まるバンドルである。

特にPをLie 群，GをPの閉部分群，更にHをGの閉部分群とすれば，上に述べたことから，主バンドル

$$P = P\,(P/G, G)$$

$$P = P\,(P/H, H)$$

$$G = G\,(G/H, H)$$

およびファイバー・バンドル

$$P/H = P/H\,(P/G, G/H, G)$$

が定まる。

$$\left.\begin{array}{ccc} G & \to & P \\ \big\downarrow H & & \big\downarrow H \\ G/H & \to & P/H \\ & & \big\downarrow G/H \\ & & P/G \end{array}\right)\ G$$

§5. バンドル準同型

命題 B（M′，F，G）をM′上のファイバー・バンドルとし，$\pi : B \to M'$をその射影とする。多様体Mおよび微分写像$f : M \to M'$が与えられれば，M×Bの部分多様体

$$f^*B = \{(x, z) \in M\times B \ ; \ f(x) = \pi(z)\}$$

はM上のファイバー・バンドルf^*B（M，F，G）となり，その射影は

$$\pi^* : f^*B \to M, \quad (x, z) \to x, \quad (x, z) \in f^*B$$

で与えられる。

（証明） Bの同伴主バンドルをP（M′，G）とし，先ずPに対してf^*Pをつくる。f^*P上に元$a \in G$による右移動を

$$R_a : f^*P \to f^*P, \quad (x, p) \to (x, pa), \quad (x, p) \in f^*P$$

で定義すれば，$f^*\mathrm{P}(\mathrm{M},\mathrm{G})$ は主バンドルとなり，これが $f^*\mathrm{B}$ の同伴主バンドルである。
この場合，主写像は

$$\chi: f^*\mathrm{P}\times\mathrm{F}\to f^*\mathrm{B},\quad (p^*,y)\to(x,py),$$
$$p^*=(x,p)\in f^*\mathrm{P},\quad y\in\mathrm{F}$$

で与えられる。　（証明終）

この $f^*\mathrm{B}$ を写像 f による B からの誘導バンドルという。

定義 1　$\mathrm{P}(\mathrm{M},\mathrm{G},\pi)$，$\mathrm{P}'(\mathrm{M}',\mathrm{G},\pi')$ を同じ構造群 G の二つの主バンドルとする。微分写像

$$\tilde f: \mathrm{P}\to\mathrm{P}'$$

に対して，写像 $f:\mathrm{M}\to\mathrm{M}'$ が存在して

(i)　$\pi'\circ\tilde f=f\circ\pi$　（$\tilde f$ は f を cover するという）

(ii)　$\tilde f(pa)=\tilde f(p)a,\quad p\in\mathrm{P},\quad a\in\mathrm{G},$

をみたすとき，写像 $\tilde f$ をバンドル写像という。更に G を F 上の左変換群とし，F を標準ファイバーとする P，P′の同伴バンドルをそれぞれ

$$\mathrm{B}(\mathrm{M},\mathrm{F},\mathrm{G},\pi),\quad \mathrm{B}'(\mathrm{M}',\mathrm{F},\mathrm{G},\pi')$$

とする。そして写像 $\tilde f:\mathrm{B}\to\mathrm{B}'$ を

(iii)　$\tilde f(py)=\tilde f(p)y,\quad p\in\mathrm{P},\quad y\in\mathrm{F}$

で定義するとき，この写像 $\tilde f$ もまたバンドル写像と呼ばれる。

バンドル写像 $\tilde f:\mathrm{B}\to\mathrm{B}'$ においても

(i)′　$\pi'\circ\tilde f=f\circ\pi$　（$\tilde f$ は f を cover する）

が成り立つ。そして点 $x\in\mathrm{M}$ を固定すれば，写像

$$\tilde f: \mathrm{G}_x\to\mathrm{G}_{x'},\quad \tilde f: \mathrm{F}_x\to\mathrm{F}_{x'},\quad x'=f(x),$$

はともに微分同型である。

定理 1　ファイバー・バンドル $\mathrm{B}'(\mathrm{M}',\mathrm{F},\mathrm{G},\pi')$，および微分写像 $f:\mathrm{M}\to\mathrm{M}'$ に対して，バンドル $\mathrm{B}(\mathrm{M},\mathrm{F},\mathrm{G},\pi)$，および f を cover するバンドル写像 $\tilde f:\mathrm{B}\to\mathrm{B}'$ が一意的に定まり，$\mathrm{B}\cong f^*\mathrm{B}'$ となる。

（証明）　写像 $f:\mathrm{M}\to\mathrm{M}'$ による B′からの誘導バンドル $f^*\mathrm{B}'$ に対して，写像

$$\tilde f: f^*\mathrm{B}'\to\mathrm{B}',\quad (x,z')\to z',\quad (x,z')\in f^*\mathrm{B}'$$

はたしかに f を cover するバンドル写像である。

逆に，f を cover するバンドル写像 $\tilde f:\mathrm{B}\to\mathrm{B}'$ があれば，バンドル同型

$$\mathrm{B}\cong f^*\mathrm{B}',\quad z\to(\pi(z),\tilde f(z)),\quad z\in\mathrm{B}$$

が成り立つ。

定義 2　$\mathrm{Q}(\mathrm{M},\mathrm{H},\pi)$，$\mathrm{P}(\mathrm{M},\mathrm{G},\pi)$ を同じ底空間 M 上の二つの主バンドルとし，$\varphi_0:\mathrm{H}\to\mathrm{G}$ を Lie 群の準同型とする。微分写像 $\varphi:\mathrm{Q}\to\mathrm{P}$ が条件

(i)　$\pi\circ\varphi=\pi$

(ii)　$\varphi(qh)=\varphi(q)\varphi_0(h),\quad q\in\mathrm{Q},\quad h\in\mathrm{H},$

をみたすとき，写像 $\varphi:\mathrm{Q}\to\mathrm{P}$ をバンドル準同型という。このとき，P を Q の拡大，Q を P の制限と呼ぶことがある。

なお，条件（i）より，点 $x\in\mathrm{M}$ に対して $\varphi:\mathrm{H}_x\to\mathrm{G}_x$ である。

定理 2　主バンドル $\mathrm{Q}(\mathrm{M},\mathrm{H})$ および群準同型

$$\varphi_0:\mathrm{H}\to\mathrm{G}$$

が与えられれば，Q の拡大 $\mathrm{P}(\mathrm{M},\mathrm{G})$ が一意的に定まる。

（証明）　先ず，作用

$$\eta:\mathrm{H}\times\mathrm{G}\to\mathrm{G},\quad (h,a)\to ha=\varphi_0(h)a$$

によつて，H は G 上の左変換群となる。G を標準ファイバーとする Q の同伴バンドルを $\mathrm{P}(\mathrm{M},\mathrm{G},\mathrm{H})$ とし，更に元 $b\in\mathrm{G}$ による P 上の右移動を

$$\mathrm{R}_b:\mathrm{P}\to\mathrm{P},\quad p=qa\to pb=q(ab),$$
$$q\in\mathrm{Q},\quad a\in\mathrm{G},\quad p=qa\in\mathrm{P}$$

で定義すれば，これは矛盾なく定まり，$\mathrm{P}(\mathrm{M},\mathrm{G})$ は主バンドルとなる。そして写像

$$\varphi:\mathrm{Q}\to\mathrm{P},\quad q\to qe,\quad q\in\mathrm{Q}$$

はバンドル準同型となり，P は Q の拡大である。次に，Q，φ_0 に対する二通りの拡大 $\{\mathrm{P},\varphi\}$，$\{\mathrm{P}',\varphi'\}$ があれば，微分同型

$$\kappa:\mathrm{P}\to\mathrm{P}',\quad \varphi(q)b\to\varphi'(q)b,\quad q\in\mathrm{Q},\quad b\in\mathrm{G}$$

が矛盾なく定まり，しかも

$$\kappa:\mathrm{P}\cong\mathrm{P}',\quad \kappa\circ\varphi=\varphi'$$

である。即ちこの二つの拡大は写像 κ により同一視できる。　（証明終）

なお，$\mathrm{P}(\mathrm{M},\mathrm{G})$ および $\varphi_0:\mathrm{H}\to\mathrm{G}$ が与えられたとき，P の制限 $\mathrm{Q}(\mathrm{M},\mathrm{H})$ は一般には存在せず，またもし存在しても一意的とはいえない。特に，H が G の閉部分群で，

injection

$$\varphi_0 : H \to G$$

に対するPの制限Qが存在するとき，“バンドルPの構造群Gは，その部分群Hまで退化する”といわれる。この場合，定理２より，バンドルPの構造はバンドルQによつて完全に定まるから，Pの代りにQを使えば議論が簡単になる。そしてFを標準ファイバーとするP，Qの同伴バンドルをそれぞれ

$$P\times_G F, \quad Q\times_H F$$

とすれば，これらは同じものとなる。実際，変換群Gの作用

$$\eta : G\times F \to F$$

をHの元だけに制限して，作用

$$\eta_H : H\times F \to F$$

について考えておけばよい。そして微分同型

$$\alpha : P\times_G F \to Q\times_H F, \quad p y \to q\,(a y)$$

$$p = q a \in P, \quad y \in F, \quad q \in Q, \quad a \in G$$

によつて，$P\times_G F$と$Q\times_H F$とは同一視できる。

<u>定理</u>３　P（M，G）<u>を主バンドル</u>，H<u>を</u>G<u>の閉部分群とする</u>。P<u>の構造群</u>G<u>が</u>H<u>まで退化するための必要十分条件は</u>，<u>等質空間</u>G／H<u>を標準ファイバーとする</u>P<u>の同伴バンドル</u>

$$P/H\ (M, G/H, G)$$

<u>が大域的な　section</u>　$\sigma : M \to P/H$<u>をもつことである</u>。

（証明）　先ず，section　σが与えられたとき，写像σによる主バンドルP（P／H，H）からの誘導バンドルを

$$Q = \sigma^* P$$

とし，その　injection　を

$$\varphi : Q \to P$$

とすれば，Q（M，H）はP（M，G）の制限である。逆に，injection　φが与えられたとき，これをHで割れば，即ち同値関係，

$$p \sim p h, \quad h \in H$$

による同値類をとれば，写像φから　section

$$\sigma : M \to P/H, \quad \pi(q) \to \pi\circ\varphi(q), \quad q \in Q$$

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r] & Q \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dash, "H"] & P \arrow[d, dash, "H"] \\ & M \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, equal] & P/H \arrow[d, dash, "G/H"] \\ & & M \end{tikzcd}$$

が引き起される。ここにπは自然射影である。（証明終）

特に，H＝e（元eだけ）とすれば，§１，定理４より

<u>系</u>　<u>主バンドル</u>P（M，G）<u>が積バンドル</u>P≃M×G<u>であるための必要十分条件は</u>，<u>構造群</u>G<u>が</u>e<u>まで退化することである</u>。

Gを連結なLie群とすれば，Gはその極大コンパクト部分群HとEuclid空間Eとの位相積H×Eとなることが知られている（岩沢－Malcev－Mostow の定理）。Euclid空間のホモトピー群は$\pi_i(E)=0$，$i\geq 0$，であることを考慮すれば，等質空間E＝G／Hを標準ファイバーとする任意のバンドルは必ず　section　をもつことが証明される（Mはパラコンパクト）。したがつてM上のバンドルの構造群Gは常にその極大コンパクト部分群Hまで退化する。特に接ベクトル・バンドルでは，構造群GL（n）は直交群O(n)まで退化する。

なお，構造群の退化については，Ⅵ，§２においてもう一度考察される。

§6. ベクトル・バンドル

<u>定義</u>１　ファイバー・バンドルB（M，V，G）において，標準ファイバーVがベクトル空間で，構造群GがVの一次変換群であるとき，Bを<u>ベクトル・バンドル</u>という。

点$x\in M$上のファイバーV_xもまたベクトル空間であるから，V_x上の　bases　全体を$\widetilde{G}_x$とし，

$$P = \bigcup_{x\in M} \widetilde{G}_x$$

とおけば，P（M，GL（V））はBの同伴主バンドルとなる。

ただし，群Gは一般にGL（V）の部分群であるから，Bの同伴主バンドルQ（M，G）を，injection

$$\varphi_0 : G \to GL(V)$$

によつて拡大したものが主バンドルPである。このPをBの<u>標構バンドル</u>という。

特に，V＝O（ベクトルoだけ）ならば，V_x＝O（ベクトルo_xだけ）となり，B≃Mと見なされる。このときBを記号Oで表わす。また，積バンドルM×Vを記号Vで表わす。

<u>定義</u>２　B（M，V，G，π），B′（M，V′，G′，π）を同じM上の二つのベクトル・

バンドルとする。微分写像

$$\varphi : B \to B'$$

が次の条件をみたすとき，φをベクトル・バンドルの準同型という。

(i) $\pi \circ \varphi = \pi$

(ii) $\varphi : V_x \to V'_x$: linear, $x \in M$

これは§5のバンドル準同型とは少し意味が違う。しかし，φが bijection の場合にはバンドル同型となる。即ち，ベクトル・バンドルの bijection $\varphi : B \to B'$ から，B，B′の標構バンドルの写像

$$\varphi : P \to P', \quad p = (e_\lambda) \to (\varphi e_\lambda), \; p \in P, \quad e_\lambda \in B,$$

が定まり，これはB，B′の同伴主バンドルの同型を与える。

B(M, V)， B′(M, V′) をM上の二つのベクトル・バンドルとする。点$x \in M$に対して

$$\mathrm{Hom}(V_x, V'_x) = \{ u : V_x \to V'_x : \text{linear} \}$$

$V_x \oplus V'_x$ (直和)， $V_x \otimes V'_x$ (テンソル積)，

はいずれもベクトル空間である。そこで

$$\mathrm{Hom}(B, B') = \bigcup_{x \in M} \mathrm{Hom}(V_x, V'_x)$$

$$B \oplus B' = \bigcup_{x \in M} V_x \oplus V'_x, \quad B \otimes B' = \bigcup_{x \in M} V_x \otimes V'_x$$

とおけば，これらはいずれもベクトル・バンドルとなる。そしてベクトル・バンドルの準同型

$$\varphi : B \to B'$$

はベクトル・バンドル Hom(B, B′) の section

$$\varphi : M \to \mathrm{Hom}(B, B')$$

と見なすことができる。

B(M, V) をベクトル・バンドルとする。標準ファイバーVの双対空間をV^*，(r, s)−テンソル空間をV^r_s，反変および共変外k−ベクトル空間を$V^{(k)}$，$V_{(k)}$，またVの自己準同型全体をEnd(V)とすれば，これらを標準ファイバーとするBの同伴バンドル

$B^*(M, V^*)$， $B^r_s(M, V^r_s)$

$B^{(k)}(M, V^{(k)})$， $B_{(k)}(M, V_{(k)})$，

$\mathrm{End}(B)\ (M, \mathrm{End}(V))$

が得られ，これらはいずれもM上のベクトル・バンドルである。

定義から明らかに

$$B^* \cong \mathrm{Hom}(B, R)$$

$$B^r_s \cong \underbrace{B \otimes \cdots \otimes B}_{r\text{個}} \otimes \underbrace{B^* \otimes \cdots \otimes B^*}_{s\text{個}}$$

$$\mathrm{Hom}(B, B') \cong B^* \otimes B'$$

$$\mathrm{End}(B) = \mathrm{Hom}(B, B) \cong B^* \otimes B$$

である。さて，M上のベクトル・バンドルの準同型の列

$$\cdots \to B_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} B_i \xrightarrow{\varphi_i} B_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

において， $\mathrm{Im}\,\varphi_{j-1} = \mathrm{Ker}\,\varphi_j$ であるとき，この列を<u>完全列</u>という。特に，完全列

$$0 \to B' \xrightarrow{\lambda} B \xrightarrow{\pi} B'' \to 0$$

について考える。定義により，λは injective (Ker $\lambda = 0$)， πは surjective (onto) である。この列において，B，B″が与えられれば，B′は

$$B' \cong \mathrm{Ker}\,\pi$$

として一意的に定まる。またB′，Bが与えられれば，B″は

$$B'' \cong B/B' = \bigcup_{x \in M} V_x / V'_x$$

として一意的に定まる。

<u>命題</u> B，B′，B″を<u>M上のベクトル・バンドルとする。</u>

$$B \cong B' \oplus B'' \quad (\text{直和})$$

<u>であるための必要十分条件は，準同型</u>

$\lambda : B' \to B$, $\mu : B'' \to B$, $\omega : B \to B'$, $\pi : B \to B''$,

<u>が存在して</u>

$$\omega \circ \lambda = \mathbb{1}, \quad \pi \circ \mu = \mathbb{1}, \quad \lambda \circ \omega + \mu \circ \pi = \mathbb{1}$$

<u>となることである。</u>

(証明) $B \cong B' \oplus B''$ならば，λ，μを injection, ω，πを射影とすれば，上の関係がみたされる。逆にこのような準同型λ，μ，ω，πが存在すれば

$$B=\lambda B'\oplus\mu B''\cong B'\oplus B''$$ （証明終）

この場合，両方向の完全列

$$0 \rightleftarrows B' \underset{\omega}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} B \underset{\mu}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} B'' \rightleftarrows 0$$

が成立する。このことに注意して

定義３　ベクトル・バンドルの完全列

$$0 \to B' \xrightarrow{\lambda} B \xrightarrow{\pi} B'' \to 0$$

において，準同型

$\mu : B'' \to B$，　$\pi\circ\mu=\mathbb{1}$，

または　$\omega : B \to B'$，　$\omega\circ\lambda=\mathbb{1}$，

をこの完全列の分解と呼ぶ。

このμ，ωはどちらが与えられても本質的に同じものである。即ち，μ，ωの中一方が与えられれば，他方は関係式

$$\lambda\circ\omega+\mu\circ\pi=\mathbb{1}$$

から一意的に定まる。そして，完全列

$$0 \to B' \xrightarrow{\lambda} B \xrightarrow{\pi} B'' \to 0$$

の分解μ（またはω）が与えられることと，Bの直和分解

$$B=\lambda B'\oplus\mu B''\cong B'\oplus B''$$

が指定されることとは同値である。

M上のベクトル・バンドルB'，B''に対して

$$B=B'\oplus B''$$

とおけば，たしかに完全列

$$0\to B'\to B\to B''\to 0$$

をつくることができる。逆にこの完全列が与えられたとき

$$B\cong B'\oplus B''$$

となるであろうか？　微分可能なベクトル・バンドルとして扱う限り，これは常に成立することがわかる。しかし複素解析的なベクトル・バンドルの場合，これは成立しない。

即ち　analytic　な完全列の分解は一般には存在しない（Ⅶ，§１参照）。

§７. 等質空間の接バンドル

定理１　Lie群Gの接ベクトル・バンドルT（G）は積バンドルである。即ち

$$T(G)\cong G\times\mathfrak{g},\quad \mathfrak{g}=T_e(G)$$

（証明）　写像

$$\varphi : G\times\mathfrak{g}\to T(G),\quad (x, A)\to xA$$
$$x\in G,\quad A\in\mathfrak{g}$$

はベクトル・バンドルの　bijection である。（証明終）

Lie 群Gの閉部分群Hによる等質空間G／Hを考える。そして群Gの積をξ，変換群GのG／H上への作用をηとし，主バンドルG（G／H，H）の右作用をξ_Hとする。即ち

$\xi\ : G\times G \to G,\ (a, b)\to ab,$

$\eta\ : G\times G/H\to G/H,\ (a, \bar{b})\to a\bar{b}=\overline{ab},$

$\xi_H : G\times H \to G,\ (a, h)\to ah$

である。これらの写像からの誘導写像を考える。即ち

$\xi : T(G)\times T(G)\to T(G),$

$\quad (X, X')\to Xb+aX',\quad X\in T_a(G),\quad X'\in T_b(G),$

$\eta : T(G)\times T(G/H)\to T(G/H),$

$\quad (X, Y)\to Xy+aY,\quad X\in T_a(G),\quad Y\in T_y(G/H),$

$\xi_H : T(G)\times T(H)\to T(G),$

$\quad (X, Z)\to Xh+aZ,\quad X\in T_a(G),\ Z\in T_h(H)$

で与えられる。積ξによってT（G）もまたLie 群となり，更に作用ηによってT（G）はT（G／H）上の変換群となる。また右作用ξ_HによってT（G）は主バンドル

$$T(G)\ (T(G/H),\ T(H))$$

となる。そしてT（G）上の同値関係

$$X\sim Xh+aZ,\quad X\in T_a(G),\quad a\in G,$$
$$Z\in T_h(H),\quad h\in H,$$

による商空間がT（G／H）となる。

いま，自然射影を

$\tau: G\to G/H,$

$\tau: T(G)\to T(G/H)$

とし，また

$\mathfrak{g}=T_e(G),\ \mathfrak{h}=T_e(H),$

$\mathfrak{f}=T_{\bar{e}}(G/H),$

$(\bar{e}=\tau e)$

$$\begin{tikzcd}
 & T(G) \arrow[d, dash, "T(H)"] \\
G \arrow[ur, dash] \arrow[d, dash, "H"'] & T(G/H) \\
G/H \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

とおく。上の同値関係を$\mathfrak{g}$上だけに制限して考えれば，$a=h=e$であるから

$X\sim X+Z,\quad X\in\mathfrak{g},\quad Z\in\mathfrak{h}$

となり，ベクトル空間の完全列

$0\to\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}\xrightarrow{\tau}\mathfrak{f}\to 0$

を得る。即ち $\mathfrak{f}\cong\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ である。

元$a\in G$による一次写像

$\eta_a: T_y(G/H)\to T_{ay}(G/H),\quad Y\to aY$

において，特に$a=h\in H$，$y=\bar{e}$，とすれば，$h\bar{e}=\bar{e}$であるから，ベクトル空間$\mathfrak{f}$の自己準同型

$is(h): \mathfrak{f}\to\mathfrak{f},\quad Y\to hY,$

を得る。よつてHは$\mathfrak{f}$上の一次変換群として作用する。表現

$is: H\to GL(\mathfrak{f}),\quad h\to is(h),\quad h\in H$

を等方性（isotropy）表現といい，一次変換群$is(H)$を等方性群という。

命題1　等質空間G/Hにおいて，自然射影を

$\tau: G\to G/H,\quad \tau: T(G)\to T(G/H)$

とし，$\mathfrak{g}=T_e(G)$，$\mathfrak{h}=T_e(H)$，$\mathfrak{f}=T_{\bar{e}}(G/H)$ とすれば，Gの随伴表現 ad とHの等方性表現 is に対して，関係

$is(h)\circ\tau=\tau\circ ad(h),\quad h\in H$

が成り立つ。即ち，元$h\in H$に対して，次の可換 diagram が成立する。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{h} \arrow[r] \arrow[d, "ad(h)"] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "ad(h)"] & \mathfrak{f} \arrow[r] \arrow[d, "is(h)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{h} \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\tau"] & \mathfrak{f} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

（証明）　$X\in T_a(G)$，$a\in G$，に対して

$\tau X=\tau(Xh+aZ),\quad Z\in T_h(H),\quad h\in H,$

であるから，特に$A\in\mathfrak{g}$に対して

$\tau\circ ad(h)A=\tau(hAh^{-1})=\tau(hA)$

$=h\cdot\tau A=is(h)\tau A$

定理2　等質空間G/Hの接ベクトル・バンドル$T(G/H)$の構造群$GL(\mathfrak{f})$は等方性群$is(H)$まで退化して，

$T(G/H)\cong G\times_{is(H)}\mathfrak{f},\quad \mathfrak{f}=T_{\bar{e}}(G/H)$

となる。即ち，$T(G/H)$の同伴主バンドルは$G(G/H, H)$，標準ファイバーは$\mathfrak{f}$で，群Hの$\mathfrak{f}$上への作用は等方性表現とする。

特に$H=e$の場合が定理1である。

（証明）　簡単にいえば次の通りである。定理1より

$T(G)=G\times\mathfrak{g},\quad T(H)=H\times\mathfrak{h},$

$T(G/H)\cong T(G)/T(H)\cong G\times\mathfrak{g}/H\times\mathfrak{h}$

$\cong G\times(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})/H\cong G\times_{is(H)}\mathfrak{f}.$

これをもう少し詳しく説明しよう。$T(G)$上の同値関係

$X\sim Xh+aZ,\quad X\in T_a(G),\quad Z\in T_h(H)$

による商空間が$T(G/H)$である。ベクトルX，Zはそれぞれ

$X=aA\in T(G),\quad a\in G,\quad A\in\mathfrak{g},$

$Z=hB\in T(H),\quad h\in H,\quad B\in\mathfrak{h},$

と書かれることを考慮して，上の同値関係を書き直すと

$aA\sim aAh+ahB=ah(ad(h^{-1})A+B),\ h\in H,\quad B\in\mathfrak{h}$

となる。自然射影

$\tau: \mathfrak{g}\to\mathfrak{f}=\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$

に対して，$\tau B=0$，

$\tau\circ ad(h^{-1})=is(h^{-1})\circ\tau$

であるから，上の同値関係に射影τを施せば（つまり$\mathfrak{h}$で割る），空間

$T(G)/\mathfrak{h}\cong G\times\mathfrak{f}$

上の同値関係

$$\begin{array}{c} T(H) \\ \| \wr \\ H\times\mathfrak{h} \end{array}
\left(\begin{tikzcd}
T(G)\cong G\times\mathfrak{g} \arrow[d, dash, "\mathfrak{h}"] \\
T(G)/\mathfrak{h}\cong G\times\mathfrak{f} \arrow[d, dash, "H"] \\
T(G/H)
\end{tikzcd}\right.$$

$(a, Y) \sim (ah, \mathrm{is}(h^{-1})Y)$,

$a \in G$, $Y = \tau A \in \mathfrak{f}$, $h \in H$

が得られ，この商空間が T（G／H）である。一方，これはバンドルの定義（§2，定理の証明）によつて，G（G／H，H）の同伴バンドル$G \times \mathrm{is}(H)\mathfrak{f}$に他ならない。

定義1　G／Hを等質空間とし，

$$\mathfrak{g} = T_e(G), \quad = T_e(H), \quad \mathfrak{f} = T_{\bar{e}}(G/H)$$

とおく。ベクトル空間の完全列

$$0 \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \xrightarrow{\tau} \mathfrak{f} \to 0$$

の分解$\mu: \mathfrak{f} \to \mathfrak{g}$，$\tau \circ \mu = 1$，が存在して

$$\mu \circ \mathrm{is}(h) = \mathrm{ad}(h) \circ \mu, \quad h \in H$$

をみたすとき，等質空間G／Hは分解的（reductive）であるという。

この場合，injection $\mu: \mathfrak{f} \to \mathfrak{g}$ によつて，$\mathfrak{f}$を$\mathfrak{g}$の線型部分空間と見なす。即ち$\mu\mathfrak{f} = \mathfrak{f}$とおく。等質空間G／Hが分解的であるための条件は，$\mathfrak{g}$がベクトル空間としての直和

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{f}, \quad \mathrm{ad}(H)\mathfrak{f} = \mathfrak{f}$$

に分けられることである。なお，$\mathfrak{f}$上では

$$\mathrm{ad}(h) = \mathrm{is}(h), \quad h \in H$$

となる。

命題2　分解的等質空間G／Hにおいて，$\mathfrak{g}$の直和分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{f}, \quad \mathrm{ad}(H)\mathfrak{f} = \mathfrak{f}$$

とする。このとき次の関係が成り立つ。

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{f}] \subset \mathfrak{f}$$

（証明）　$\mathfrak{h}$は部分群HのLie　代数であるから，A，$B \in \mathfrak{h}$に対して$[A, B] \in \mathfrak{h}$である。即ち$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$が成り立つ。また

$$A \in \mathfrak{h}, \quad B \in \mathfrak{f}, \quad \varphi_t = \exp tA$$

とすれば，φ_tはHに含まれる1径数部分群であるから

$$\mathrm{ad}(\varphi_t) B \in \mathfrak{f}$$

である。これに微分$(d/dt)_{t=0}$を施せば，$[A, B] \in \mathfrak{f}$となる。即ち$[\mathfrak{h}, \mathfrak{f}] \subset \mathfrak{f}$が成り立つ。

定義2　分解的等質空間G／Hにおいて，$\mathfrak{g}$の直和分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{f}, \quad \mathrm{ad}(H)\mathfrak{f} = \mathfrak{f}$$

とする。更に条件，$[\mathfrak{f}, \mathfrak{f}] \subseteq \mathfrak{h}$がみたされるとき，等質空間G／Hは対称（symmetric）であるという。

§8　ファイバー・バンドルの接ベクトル

P（M，G）を主バンドル，B（M，F，G）をPの同伴バンドルとする。Pの右作用，Bの主写像および射影

$\xi: P \times G \to P$,　$(p, a) \to pa$,

$\chi: P \times F \to B$,　$(p, y) \to py$,

$\pi: P \to M$,

$\pi': B \to M$,

からの誘導写像

$\xi: T(P) \times T(G) \to T(P)$,　$(X, aA) \to Xa + paA$,

$X \in T_p(P)$, $a \in G$, $A \in \mathfrak{g}$,

$\chi: T(P) \times T(F) \to T(B)$,　$(X, Y) \to Xy + pY$,

$X \in T_p(P)$, $Y \in T_y(F)$,

$\pi: T(P) \to T(M)$,

$\pi': T(B) \to T(M)$,

をとれば，主バンドルおよびその同伴バンドル

T（P）（T（M），T（G）），T（B）（T（M），T（F），T（G）），

を得る。

定義　ファイバー・バンドルB（M，F，G，π'）において，接ベクトル$X \in T(B)$で$\pi'X = 0$となるものをBの鉛直ベクトルという。そこで，

$$V_z(B) = \{X \in T_z(B) \,;\, \pi'X = o\}, \quad z \in B,$$

$$V(B) = \bigcup_{z \in B} V_z(B) = \{X \in T(B) \,;\, \pi'X = o\}$$

とおけば，V（B）はB上のベクトル・バンドルとなり，点z上のファイバーがベクトル空間$V_z(B)$である。V（B）をBの鉛直ベクトル・バンドル，$V_z(B)$を点$z \in B$における

鉛直ベクトル空間という。

命題1　P（M，G，π）を主バンドル，B（M，F，G，π'）をPの同伴バンドルとする。点z∈Bをとり

$$z=py,\quad p\in P,\quad y\in F,\quad x=\pi(p)=\pi'(z)\in M$$

とおく。点p∈Pに対する許容写像からの誘導写像

$$p: T_y(F)\to T_z(B),\quad Y\to pY$$

をとれば，ベクトル空間の完全列

$$0\to T_y(F)\xrightarrow{p} T_z(B)\xrightarrow{\pi'} T_x(M)\to 0$$

が成立して，写像pはベクトル空間の bijection

$$p: T_y(F)\cong V_x(B)$$

である。特に，主バンドルP（M，G，π）に対して，完全列

$$0\to \mathfrak{g}\xrightarrow{p} T_p(P)\xrightarrow{\pi} T_x(M)\to 0$$

$$p: \mathfrak{g}=T_e(G)\cong V_p(P)$$

が成立する。

（証明）　この命題の意味は，鉛直ベクトルとは各ファイバーに接する方向をもつものであることを示している。これは自明であるが，詳しく説明しよう。写像

$$p: F\to F_x,\qquad y\to py,\qquad y\in F,$$

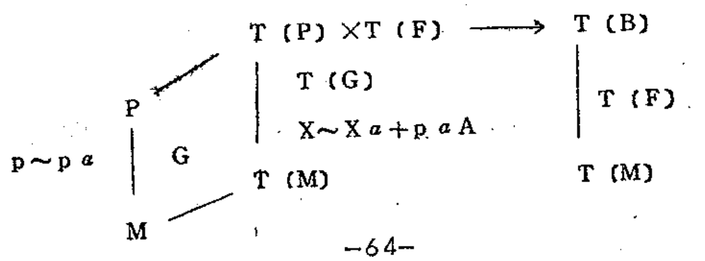
は微分同型であるから，誘導写像

$$p: T_y(F)\to T_z(B),\quad Y\to pY,\quad Y\in T_y(F),$$

は injection である。またバンドルには local section が存在するから，射影からの誘導写像

$$\pi: T_p(P)\to T_x(M);\quad \pi': T_z(B)\to T_x(M)$$

は surjections であつて，これらは同値関係の自然射影として表わすことができる。



したがつて，ベクトルX，X'∈T（P）が，πX=πX'であるための条件は

$$X'=Xa+paA,\quad a\in G,\quad p\in P,\quad A\in\mathfrak{g},$$

と書けることであり，特にX，X'∈T_p（P）とすれば

$$X'=X+pA,\quad A\in\mathfrak{g},\quad (a=e)$$

である。よつて，　$p\mathfrak{g}=\mathrm{Ker}\,\pi=V_p(P)$　となる。

また，点z=py∈Bにおける任意の接ベクトルは

$$Z=Xy+pY\in T_z(B),\quad X\in T_p(P),\quad Y\in T_y(F),$$

の形で表わされる。そしてπ'Z=πXである。したがつて，二つのベクトル

$$Z=Xy+pY,\quad Z'=X'y+pY'\in T_z(B)$$

が，π'Z=π'Z'であるための条件は

$$X'=X+pA,\quad A\in\mathfrak{g},$$

となることである。即ち

$$Z'=(X+pA)y+pY'=Z+p(Ay-Y+Y')$$

$$=Z+pY'',\quad Y''\in T_y(F),$$

と書けることである。よつて

$$pT_y(F)=\mathrm{Ker}\ \pi'=V_z(B)$$

定理1　主バンドルP（M，G）の鉛直ベクトル・バンドルV（P）は積バンドルである。即ち

$$V(P)\cong P\times\mathfrak{g},\qquad \mathfrak{g}=T_e(G)$$

（証明）　写像

$$\varphi: P\times\mathfrak{g}\to V(P),\quad (p,A)\to pA,\quad p\in P,\quad A\in\mathfrak{g}$$

はベクトル・バンドルの bijection である。（証明終）

P（M，G，π）を主バンドル，HをGの閉部分群とする。

§4で述べたように，等質空間G／Hを標準ファイバーとするPの同伴バンドルP／H（M，G／H，G，π'）および主バンドルP（P／H，H，τ）が定まり，これらの射影の間の関係は

$$\pi=\pi'\circ\tau: P\xrightarrow{\tau} P/H\xrightarrow{\pi'} M$$

となつている。また

$$\mathfrak{g}=T_e(G),\quad \mathfrak{h}=T_e(H),\quad \mathfrak{f}=T_{\bar e}(G/H)$$

とおくとき，完全列

$$0 \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \xrightarrow{\tau_0} \mathfrak{f} \to 0$$

が成立している。

命題2　バンドルP（M，G，π），P／H（M，G／H，G，π'）の鉛直ベクトル・バンドルをそれぞれV（P），V（P／H）とする。点$z \in P/H$に対して，ベクトル空間の完全列

$$0 \to \mathfrak{h} \xrightarrow{p} V_p(P) \xrightarrow{\tau} V_z(P/H) \to 0$$

$$z=\bar{p}=p\bar{e} \in P/H,\quad p \in P,$$

が成立する。

（証明）　三つのバンドル

P（M，G，π），P（P／H，H，τ），

P／H（M，G／H，G，π'）

に対して，命題1の完全列をつくれば，可換 diagram

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{h} \arrow[r] \arrow[d, "1"] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\tau_0"] \arrow[d, "p"] & \mathfrak{f} \arrow[r] \arrow[d, "p"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{h} \arrow[r, "p"] \arrow[d] & T_p(P) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi"] & T_z(P/H) \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & T_x(M) \arrow[r, "1"] \arrow[d] & T_x(M) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$$(x=\pi(P)=\pi'(z) \in M)$$

が成立する。ここで写像π，π'の kernel をとれば，完全列

$$0 \to \mathfrak{h} \xrightarrow{p} V_p(P) \xrightarrow{\tau} V_z(P/H) \to 0$$

を得る。

定理2　バンドルP／H（M，G／H，G）の鉛直ベクトル・バンドルV（P／H）の構造群GL（$\mathfrak{f}$）は等方性群is（H）まで退化して，

$$V(P/H) \cong P \times_{is(H)} \mathfrak{f},\qquad \mathfrak{f}=T_{\bar{e}}(G/H)$$

となる。即ち，V（P／H）の同伴主バンドルはP（P／H，H），標準ファイバーは$\mathfrak{f}$で，群Hの$\mathfrak{f}$上への作用は等方性表現とする。

特にH＝eの場合が定理1である。

（証明）　主バンドルP（P／H，H）の右作用

$$\xi_H : P \times H \to P,\ (p,h) \to ph$$

からの誘導写像

$$\xi_H\quad T(P) \times T(H) \to T(P),\ (X, hB) \to Xh+phB$$

$$X \in T_p(P),\quad h \in H,\quad B \in \mathfrak{h}$$

をとれば，これを右作用として主バンドル

$$T(P)\ (T(P/H),\ T(H),\ \tau)$$

が得られる。よってT（P）上の同値関係

$$X \sim Xh+phB,\quad X \in T_p(P),\quad h \in H,\quad B \in \mathfrak{h}$$

による商空間がT（P／H）で，その自然射影が

$$\tau : T(P) \to T(P/H)$$

である。命題2より，写像

$$\tau : V(P) \to V(P/H)$$

は onto であるから，V（P）上の同値関係

$$pA \sim pAh+phB,\quad X=pA \in V_p(P),\ A \in \mathfrak{g}$$

による商空間がV（P／H）である。以下§7，定理2と全く同様である。即ち

$$V(P/H) \cong V(P)/T(H) \cong P \times \mathfrak{g}/H \times \mathfrak{h}$$
$$\cong P \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})/H \cong P \times_{is(H)} \mathfrak{f}$$

§9　主バンドルの基本列

命題1　主バンドルP（M，G）の鉛直ベクトル・バンドルV（P）はPの右移動R_a，$a \in G$，で不変である。即ち

$$R_a V_p(P) = V_{pa}(P),\quad p \in P,$$

である。そして，点$p \in P$を bijection

$$p : \mathfrak{g} \to V_p(P),\ A \to pA,\quad A \in \mathfrak{g} = T_e(G),$$

と見なすとき

$$R_a \circ p = pa \circ ad(a^{-1})$$

である。

（証明）　任意の鉛直ベクトル$X \in V_p(P)$は，

$$X = pA,\quad A \in \mathfrak{g},$$

の形で一意的に表わされるから

$$R_a X = pAa = pa \cdot a^{-1}Aa = (pa)\, ad(a^{-1})A \in V_{pa}(P).$$

定義1　P（M，G）を主バンドルとする。元$A \in \mathfrak{g}$に対して，P上のベクトル場

$$A^* : p \to pA,\quad p \in P,$$

をPの基本ベクトル場という。

基本ベクトル場は勿論鉛直である。

命題2　P（M，G）の右移動R_a，$a \in G$，によつて，任意の基本ベクトル場はまた基本ベクトル場に移る。即ち

$$R_a : A^* \to (ad(a^{-1})A)^*,\quad A \in \mathfrak{g}$$

（証明）　$R_a pA = pAa = pa\, a^{-1}Aa$，$p \in P$，

命題3　P（M，G）の1径数右移動群

$$R_{\varphi_t},\quad \varphi_t = exp\ tA,\quad A \in \mathfrak{g},$$

の無限小変換は基本ベクトル場A^*である。

（証明）　定義（Ⅱ，§6）より

$$\frac{d}{dt}(p\varphi_t) = P\left(\frac{d\varphi_t}{dt}\right) = p(\varphi_t A) = (p\varphi_t)A$$

定義2　主バンドルP（M，G）の接ベクトル・バンドルT（P）上の同値関係

$$X \sim Xa,\quad a \in G,$$

による商空間Q（M）＝T（P）／GをPの商ベクトル・バンドルという。

よつて元$q \in Q(M)$は，一つのファイバーG_x上で与えられたPの右不変ベクトル場を

表わすものである。Q（M）はM上のベクトル・バンドルとなる。

定理　P（M，G，π）を主バンドル，Q（M）をPの商ベクトル・バンドルとする。群Gの随伴表現より定まるPの同伴バンドルを

$$L(M) = P \times_{ad(G)} \mathfrak{g},\quad \mathfrak{g} = T_e(G),$$

とすれば，M上のベクトル・バンドルの完全列

$$0 \to L(M) \xrightarrow{\lambda} Q(M) \xrightarrow{\pi} T(M) \to 0$$

が成立する。これを主バンドルPの基本列という。

（証明）　Mの接ベクトル・バンドルT（M）から，写像

$$\pi : P \to M$$

によつて導かれる誘導バンドルを

$$E(P) = \{(p, W) ;\ p \in P,\ W \in T_x(M),\ \pi(p) = x\}$$

とし，写像

$$\pi : T(P) \to E(P),\quad X \to (p, \pi X),\quad X \in T_p(P),$$

$$\lambda : P \times \mathfrak{g} \to T(P),\quad (p, A) \to pA,$$

をとれば，P上のベクトル・バンドルの完全列

$$0 \to P \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\lambda} T(P) \xrightarrow{\pi} E(P) \to 0$$

を得る。しかも命題1より，元$a \in G$に対して可換 diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P \times \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, "R_a \times ad(a^{-1})"] & T(P) \arrow[r] \arrow[d, "R_a"] & E(P) \arrow[r] \arrow[d, "R_a \times 1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \times \mathfrak{g} \arrow[r] & T(P) \arrow[r] & E(P) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

が成立するから，この完全列をGで割れば，M上のベクトル・バンドルの完全列を得る。これが基本列である。即ち

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P \times \mathfrak{g} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\chi"] & T(P) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "X \sim Xa"] & E(P) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\pi}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L(M) \arrow[r, "\lambda"] & Q(M) \arrow[r, "\pi"] & T(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

となる。ここに，写像

$$\chi : P\times\mathfrak{g} \to L(M)$$

はバンドルL(M)の主写像である。実際，$P\times\mathfrak{g}$ 上の同値関係

$$(p, A) \sim (pa, \mathrm{ad}(a^{-1})A), \quad a\in G,$$

による商空間がL(M)で，その自然射影がχである。

§10 テンソル的微分形式

P(M，G，π)を主バンドル，Vを有限次元実ベクトル空間とする。P上の値域Vのk-form

$$\theta : T^k(P) \to V$$

について，次の定義をしておく。

定義1　表現 $\rho : G\to GL(V)$ に対して

$$\theta\circ R_a = \rho(a^{-1})\,\theta, \quad a\in G,$$

をみたすとき，θを(ρ，V)型の反変形式という。即ち

$$\theta(X_1 a, \cdots\cdots, X_k a) = \rho(a^{-1})\,\theta(X_1, \cdots\cdots, X_k),$$
$$X_1, \cdots\cdots, X_k \in T_p(P), \quad p\in P,$$

である。

定義2　接ベクトル $X_1, \cdots\cdots, X_k \in T_p(P)$ に対して，

$$\pi X_1 = 0 \text{ならば} \quad \theta(X_1, \cdots\cdots, X_k) = 0$$

となるとき，P上の form θ は水平であるという。

なお，form は交代的であることに注意すれば，θが水平であるための条件は次のようにいえる。即ち$X_1, \cdots\cdots, X_k$ の中，少くとも一つが鉛直ベクトルであれば $\theta(X_1, \cdots\cdots, X_k)=0$ となる。

定義3　P上の form θ が水平かつ(ρ，V)型の反変形式であるとき，θを(ρ，V)型のテンソル的形式という。

特に0-form(函数)のとき，単にテンソルという。この場合，水平の条件は不要である。

一般に，ベクトル・バンドルB(M，F，G)に対して，外k-ベクトル空間 $F^{(k)}=\wedge^k(F)$ を標準ファイバーとするBの同伴バンドルを$B^{(k)}(M)$とすれば，これもまたベクトル・バンドルである。そして多様体M上の値域Vのk-form θ は微分写像

$$\theta : T^{(k)}(M) \to V$$

であって各ファイバー$T^{(k)}_x(M)$上では linear なものと見なすことができる。実際，$\theta(X_1, \cdots\cdots, X_k)$は複一次かつ交代的であるから

$$u = \sum_a X_{1a}\wedge\cdots\cdots\wedge X_{ka} \in T^{(k)}_x(M), \quad X_{ja}\in T_x(M),$$

$$\theta(u) = \sum_a \theta(X_{1a}, \cdots\cdots, X_{ka}),$$

とおけば，$\theta(u)$はuの表わし方に関係なく定まる。明らかに，点$x\in M$に対して，写像

$$\theta : T^{(k)}_x(M) \to V$$

は linear である。それゆえ，form θ を更にベクトル・バンドルの準同型

$$\theta : T^{(k)}(M) \to M\times V \quad u \to (x, \theta(u)), \quad u\in T^{(k)}_x(M), \quad x\in M,$$

と見なすことができる。これらを何れも同じθで表わしておく。

命題1　P(M，G，π)を主バンドル，Q(M)をPの商ベクトル・バンドルとする。P上の(ρ，V)型の反変k次形式θはベクトル・バンドルの準同型

$$\theta : Q^{(k)}(M) \to B(M)$$

と見なすことができる。ここにB(M)は表現(ρ，V)で定まるPの同伴バンドル

$$B(M, V, \rho(G)) = P\times_{\rho(G)} V$$

である。

(証明)　$Q^{(k)}(M) = T^{(k)}(P)/G$ であるから，この自然射影をσとし，バンドルBの主写像をχとすれば，条件

$$\theta(ua) = \rho(a^{-1})\,\theta(u), \quad u\in T^{(k)}(P), \quad a\in G,$$

より，$\chi\circ\theta = \bar{\theta}\circ\sigma$ となる準同型$\bar{\theta}$が定まり，θと$\bar{\theta}$とは1対1に対応する。この$\bar{\theta}$も同じくθで表わす。

$$\begin{tikzcd} T^{(k)}(P) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\sigma"', "u \sim ua"] & P \times V \arrow[d, "\chi"', "(p', v) \sim (pa,\ \rho(a^{-1})v)"] \\ Q^{(k)}(M) \arrow[r, "\bar{\theta}"] & B \end{tikzcd}$$

$$\bar{\theta} : \sigma(u) \to \chi(p,\ \theta(u)),\quad \sigma(u) \in Q^{(k)}(M).$$

（証明終）

<u>命題2</u>　<u>主バンドル</u>$P(M, G, \pi)$ <u>上の値域</u>V<u>の</u><u>k-form</u>

$$\theta : T^{(k)}(P) \to V$$

<u>が水平であるための条件は</u>

$$\pi u = o,\quad u \in T^{(k)}(P),\ \text{ならば}\ \theta(u) = o$$

<u>となることである。</u>

（証明）　点$p \in P$における鉛直ベクトル空間$V_p(P)$の base $(X_1, \cdots\cdots, X_r)$ をとり，更にこれを部分に含む$T_p(P)$の base

$$(X_1, \cdots\cdots, X_r, X_{r+1}, \cdots\cdots, X_{r+n})$$

をとれば，$\pi X_1 = \cdots\cdots = \pi X_r = O$ となり，しかも

$$(\pi X_{r+1}, \cdots\cdots, \pi X_{r+n})$$

は $T_x(M)$， $x = \pi(p)$，の base となる。したがつて，元

$$u = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots\cdots < i_k \leq r+n} u^{i_1 \cdots i_k} X_{i_1} \wedge \cdots \wedge X_{i_k} \in T_p^{(k)}(P)$$

が$\pi u = O$であるための条件は，$u^{i_1 \cdots\cdots i_k} \neq O$ なる項において，ベクトルX_{i_1} が鉛直となることである。ゆえに，$\pi u = O$ならば$\theta(u) = O$である。

<u>命題3</u>　<u>主バンドル</u>$P(M, G, \pi)$ <u>上の</u>(ρ, V) <u>型のテンソル的</u>k<u>次形式</u>θ<u>はベクトル・バンドルの準同型</u>

$$\theta : T^{(k)}(M) \to B(M)$$

<u>と見なすことができる。</u><u>ここに</u>$B(M) = P \times_{\rho(G)} V$<u>である。</u>

（証明）　θは反変形式であるから，命題1より，準同型

$$\theta : Q^{(k)}(M) \to B(M)$$

と見なすことができる。

しかも，θは水平だから，命題2より，

$$\pi w = O,\quad w \in Q^{(k)}(M),$$

ならば $\theta(w) = O$である。

よつて，$\theta = \bar{\theta} \circ \pi$ となる準同型$\bar{\theta}$が定まり，θと$\bar{\theta}$とは1対1に対応する。この$\bar{\theta}$も同じくθで表わす。

$$\begin{tikzcd} Q^{(k)}(M) \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\theta"] & \\ T^{(k)}(M) \arrow[r, "\bar{\theta}"] & B(M) \end{tikzcd}$$

$$\pi w \to \theta(w)$$

（証明終）

特に，(ρ, V) 型のテンソルは， section

$$f : M \to B$$

と見なされる。また (ρ, V) 型のテンソル的1次形式は準同型

$$\theta : T(M) \to B(M)$$

と見なされ，これはまた section

$$\theta : M \to \mathrm{Hom}(T, B)$$

と考えてもよい（§6）。

<u>定義4</u>　$P(M, G, \pi)$ を主バンドルとし，trivial な表現

$$\rho_0 : G \to GL(V),\quad a \to \mathbb{1},\quad a \in G,$$

をとる。P上の(ρ_0, V) 型のテンソル的形式を<u>スカラー形式</u>という。即ち，k-form θ がスカラー形式であるための条件は

(i)　$\theta \circ R_a = \theta$，　$a \in G$　（右移動で不変）

(ii)　$\pi X_1 = O$ならば$\theta(X_1, \cdots\cdots, X_k) = O$　（水平）

をみたすことである。命題3によれば，P上のスカラーk次形式θは底空間M上のk-form

$$\theta : T^{(k)}(M) \to M \times V$$

と見なすことができる。即ち，

M上のk-form

$$\theta : T^k(M) \to V$$

$$\begin{tikzcd} T^{(k)}(P) \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\theta"] & \\ T^{(k)}(M) \arrow[r, "\bar{\theta}"] & V \end{tikzcd}$$

を射影πによってP上の form

$$\theta \circ \pi : T^k (P) \to V$$

と見なしたものがスカラーk次形式であって，$\theta \circ \pi$も同じくθで表わしておく。

Ⅳ　接　　続

§1　主バンドル上の接続

定義　主バンドルP(M, G, π)の基本列

$$O \to L(M) \xrightarrow{\lambda} Q(M) \xrightarrow{\pi} T(M) \to O$$

の分解ΓをP(M, G, π)上の接続(connection)という。

即ち，P上の接続Γとは，ベクトル・バンドルの準同型

$$\gamma : T(M) \to Q(M), \quad \omega : Q(M) \to L(M),$$

$$\pi \circ \gamma = \mathbf{1}, \quad \omega \circ \lambda = \mathbf{1}, \quad \gamma \circ \pi + \lambda \circ \omega = \mathbf{1},$$

が与えられること，換言すれば直和分解

$$Q(M) = \lambda L(M) \oplus \gamma T(M) \cong L(M) \oplus T(M)$$

が指定されることを意味している。したがって準同型

$$\gamma : \ T(M) \to Q(M), \quad \pi \circ \gamma = \mathbf{1},$$

$$\omega : \ Q(M) \to L(M), \quad \omega \circ \lambda = \mathbf{1}$$

の中，いずれか一方を指定すれば，Pの接続は一意的に定まる(Ⅲ，§6，定義3)。そして，同一の接続Γを定義するγとωとの関係は

$$\mathrm{Im}\gamma = \mathrm{Ker}\ \omega$$

で与えられる。

基本列をつくる前のP上のベクトル・バンドルの列

$$\begin{array}{ccccccccc} O & \to & P \times \mathfrak{g} & \xrightarrow{\lambda} & T(P) & \xrightarrow{\pi} & E(P) & \to & O \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ O & \to & L(M) & \to & Q(M) & \to & T(M) & \to & O \end{array}$$

にさかのぼって考えよう(Ⅲ，§9，定理)。ここにE(P)は射影πによるT(M)からの誘導バンドル$E = \pi^* T(M)$で，写像

$$\lambda : P \times \mathfrak{g} \to T(P), \qquad (p, A) \to pA$$

$$\pi : \mathrm{T}(\mathrm{P}) \to \mathrm{E}(\mathrm{P}), \qquad X \to (p, \pi X),\ X \in \mathrm{T}_p(\mathrm{P})$$

をとるものとする。このとき，P（M，G，π）の接続Γとは，この列の分解であって，群Gの作用で不変なものと考えられる。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{P}\times\mathfrak{g} \arrow[r, shift left, "\lambda"] \arrow[d, "\mathrm{R}_a\times ad(a^{-1})"'] & \mathrm{T}(\mathrm{P}) \arrow[l, shift left, "\omega"] \arrow[r, shift left, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{R}_a"'] & \mathrm{E}(\mathrm{P}) \arrow[l, shift left, "\gamma"] \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{R}_a\times 1"'] & 0 & a \in G \\
0 \arrow[r] & \mathrm{P}\times\mathfrak{g} \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \mathrm{T}(\mathrm{P}) \arrow[l, shift left, "\omega"] \arrow[r, shift left, "\pi"] & \mathrm{E}(\mathrm{P}) \arrow[l, shift left, "\gamma"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

即ち，次のようなベクトル・バンドルの準同型

$$\gamma : \mathrm{E}(\mathrm{P}) \to \mathrm{T}(\mathrm{P}), \qquad \omega : \mathrm{T}(\mathrm{P}) \to \mathrm{P}\times\mathfrak{g}$$

$$\pi o \gamma = 1, \quad \omega o \lambda = 1, \quad \gamma o \pi + \lambda o \omega = 1,$$

$$\mathrm{R}_a o \gamma = \gamma o\ (\mathrm{R}_a \times 1),$$

$$\omega o \mathrm{R}_a = (\mathrm{R}_a \times ad(a^{-1}))\, o \omega, \quad a \in G$$

が与えられることである。

鉛直ベクトル・バンドルはV（P）＝ $\mathrm{Im}\lambda$である。そこで

$$\mathrm{H}(\mathrm{P}) = \mathrm{Im}\gamma$$

とおき，これを接続Γの水平ベクトル・バンドルと名づけ，ベクトル$X \in \mathrm{H}(\mathrm{P})$を水平ベクトル，また

$$\mathrm{H}_p(\mathrm{P}) = \mathrm{T}_p(\mathrm{P}) \cap \mathrm{H}(\mathrm{P}), \qquad p \in \mathrm{P},$$

を点pにおける水平ベクトル空間という。そして，P上の接続Γとは，Pの右移動で不変な直和分解

$$\mathrm{T}(\mathrm{P}) = \mathrm{V}(\mathrm{P}) \oplus \mathrm{H}(\mathrm{P}),$$

$$\mathrm{R}_a\, \mathrm{H}_p(\mathrm{P}) = \mathrm{H}_{pa}(\mathrm{P}),$$

$$\mathrm{R}_a\, \mathrm{V}_p(\mathrm{P}) = \mathrm{V}_{pa}(\mathrm{P}), \quad p \in \mathrm{P}, \quad a \in G,$$

を指定することである。この直和分解による射影

$$h = \gamma o \pi : \mathrm{T}(\mathrm{P}) \to \mathrm{H}(\mathrm{P})$$

$$v = \lambda o \omega : \mathrm{T}(\mathrm{P}) \to \mathrm{V}(\mathrm{P})$$

をそれぞれ水平射影，鉛直射影と呼ぶことにする。接続Γは，射影h，vの中，いずれか一方を指定すれば定まる。これについて次の命題が成立する。証明はいずれも自明である。

命題1　接続Γの水平，鉛直射影をh，vとすれば，

$$h o v = v o h = 0, \quad h + v = 1$$

命題2　主バンドルP（M，G）の接ベクトル・バンドルT（P）において，

（1）自己準同型　$h : \mathrm{T}(\mathrm{P}) \to \mathrm{T}(\mathrm{P})$　が接続の水平射影となるための条件は

（i）$h o h = h$

（ii）$h o \mathrm{R}_a = \mathrm{R}_a o h, \quad a \in G$

（iii）$\mathrm{Ker}\, h = \mathrm{V}(\mathrm{P})$

（2）自己準同型　$v : \mathrm{T}(\mathrm{P}) \to \mathrm{T}(\mathrm{P})$　が接続の鉛直射影となるための条件は

（i）$v o v = v$

（ii）$v o \mathrm{R}_a = \mathrm{R}_a o v, \quad a \in G$

（iii）$\mathrm{Im}\, v = \mathrm{V}(\mathrm{P})$

（3）このようなhとvとが同じ接続Γを定義するための条件は

$$h + v = 1.$$

次に，準同型

$$\omega : \mathrm{T}(\mathrm{P}) \to \mathrm{P}\times\mathfrak{g}, \quad \omega o \lambda = 1,$$

についてしらべよう。これは準同型

$$\omega : \mathrm{Q}(\mathrm{M}) \to \mathrm{L}(\mathrm{M})$$

と見なされるから，（$\mathfrak{g}$，ad）型の反変1－formとなる（II，§10，命題1）。そして，鉛直ベクトル・バンドルV（P）上では$\omega = \lambda^{-1}$で与えられる。この1－form

$$\omega : \mathrm{T}(\mathrm{P}) \to \mathfrak{g}$$

を接続形式と呼ぶ。接続Γは接続形式ωが与えられれば定まる。明らかに次の命題が成立する。

命題3　接続Γの接続形式をωとすれば，

$$\omega h = 0, \quad \omega v = \omega$$

命題4　主バンドルP（M，G）上の値域$\mathfrak{g}$の1－form

$$\omega : \mathrm{T}(\mathrm{P}) \to \mathfrak{g}$$

が接続形式となるための条件は

（i）$\omega o \mathrm{R}_a = ad(a^{-1})\, \omega, \quad a \in G,$

（ii）鉛直ベクトル$X \in \mathrm{V}_p(\mathrm{P})$に対して，$\omega(X) = \rho^{-1} X$，

がみたされることである。

さて，P（M，G，π），P′（M′，G，π'）を構造群Gの二つの主バンドルとし，$\tilde{f}$：P→P′ をバンドル写像とする（Ⅲ，§5，定義1）。いま，P′ 上の接続

$$\omega : T(P') \to \mathfrak{g}$$

が与えられたとき

$$\omega^* = \omega \circ \tilde{f}$$

とおけば，1－form

$$\omega^* : T(P) \to \mathfrak{g}$$

$$\begin{array}{ccc} T(P) & & \\ \downarrow \tilde{f} & \searrow \omega^* & \\ T(P') & \xrightarrow{\ \omega\ } & \mathfrak{g} \end{array}$$

はP上の接続形式となる。これを接続ωの f^* による逆像と呼ぶことにする。主バンドルP′ およびP′ 上の接続Γに対して，微分写像

$$f : M \to M'$$

が与えられれば，誘導バンドル

$$P = f^* P'$$

$$\begin{array}{ccc} (\Gamma^*) & & (\Gamma) \\ P & \longrightarrow & P' \\ \big| & & \big| \\ M & \xrightarrow{\ f\ } & M' \end{array}$$

およびP上の接続Γ^*が逆像として一意的に定まる。

次に，P（M，G，π），P′（M，G′，π）をM上の二つの主バンドルとし，φ：P→P′ をバンドル準同型とする。即ち，群の準同型φ_0：G→G′ が与えられて

$$\varphi(pa) = \varphi(p)\,\varphi_0(a), \quad p \in P, \quad a \in G$$

をみたす。φの誘導写像φ：T（P）→T（P′）においても

$$\varphi(Xa) = \varphi(X)\,\varphi_0(a), \quad X \in T(P), \quad a \in G$$

がみたされるから，商ベクトル・バンドルの準同型

$$\varphi : Q(M) \to Q'(M)$$

が定まり，したがってP，P′ の基本列の準同型（可換）

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & L(M) & \xrightarrow{\lambda} & Q(M) & \xrightarrow{\pi} & T(M) & \to & 0 \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \| & & \\ 0 & \to & L'(M) & \xrightarrow{\lambda'} & Q'(M) & \xrightarrow{\pi'} & T(M) & \to & 0 \end{array}$$

が成り立つ。いま，P上の接続

$$\gamma : T(M) \to Q(M), \quad \pi \circ \gamma = \mathbf{1}$$

が与えられたとき，$\gamma' = \varphi \circ \gamma$ とおけば，準同型

$$\gamma' : T(M) \to Q'(M), \quad \pi' \circ \gamma' = \mathbf{1}$$

はP′ 上の接続となる。これを接続γの拡大と呼ぶことにする。主バンドルPおよびP上の接続Γに対して，群の準同型

$$\varphi_0 : G \to G'$$

が与えられれば，主バンドルP′ およびP′ 上の接続Γ' がΓの拡大として一意的に定まる。

なお，バンドル写像 $\tilde{f}$：P（M，G）→P′（M′，G）に対して，P上の接続Γの$\tilde{f}$による像は一般には存在せず，またバンドル準同型φ：P（M，G）→P′（M，G′）に対して，P′ 上の接続Γ' のP上への制限は一般には存在しない。

§2　接続形式の変換法則

主バンドルP（M，G，π）において，Mの開被覆$\{U_i\}_{i \in I}$ 内での転移函数を

$$\{g_{ij}\}_{i,j \in I}, \quad g_{ij} : U_i \cap U_j \to G$$

とし，これらを定めるlocal sectionsを

$$\{U_i, s_i\}_{i \in I}, \quad s_i : U_i \to P, \quad \pi \circ s_i = \mathbf{1}$$

とする（Ⅲ，§1）。また，これらの誘導写像を

$$dg_{ij} : T(U_i \cap U_j) \to T(G),$$

$$ds_i : T(U) \to T(P)$$

で表わす。いま，P上の接続Γが与えられたとし，接続形式を

$$\omega : T(P) \to \mathfrak{g}$$

とする。そこで，$\omega_i = \omega \circ ds_i$ とおいて1－formsの族

$$\{\omega_i\}_{i \in I}, \quad \omega_i : T(U_i) \to \mathfrak{g},$$

を被覆$\{U_i\}_{i \in I}$ 上の接続形式と呼ぶ。

命題　Mの開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ 上の接続形式 $\{\omega_i\}_{i \in I}$ は，次の変換法則によって特性づけられる。

$$\omega_j(X) = ad(g_{ij}(x)^{-1})\,\omega_i(X) + g_{ij}(x)^{-1}dg_{ij}(X),$$

$$X \in T_x(U_i \cap U_j),\quad x \in U_i \cap U_j$$

（証明） 写像 $s_i : U_i \to P$, $g_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ に対して

$$s_j(x) = s_i(x)\,g_{ij}(x),\quad x \in U_i \cap U_j$$

であるから，誘導写像 ds_i ，dg_{ij} に対して

$$ds_j(X) = ds_i(X)\,g_{ij}(x) + s_i(x)\,dg_{ij}(X),$$

$$X \in T_x(U_i \cap U_j),$$

が成り立つ。この式の右辺第一項は $R_a ds_i(X)$， $a = g_{ij}(x)$ ，を表わし，第二項は鉛直ベクトルである。よつて，ωの条件（§.1，命題4）より

$$\omega_j(X) = \omega(ds_j(X))$$

$$= \omega\{ds_i(X)\,g_{ij}(x) + s_i(x)\,dg_{ij}(X)\}$$

$$= ad(g_{ij}(x)^{-1})\,\omega(ds_i(X)) + \{s_i(x)\,g_{ij}(x)\}^{-1}\,s_i(x)\,dg_{ij}(X)$$

$$= ad(g_{ij}(x)^{-1})\,\omega_i(X) + g_{ij}(x)^{-1}dg_{ij}(X).$$

逆に，$\{U_i\}_{i \in I}$ 上にこの変換法則をみたす 1－forms

$$\{\omega_i\}_{i \in I},\quad \omega_i : T(U_i) \to \mathfrak{g},$$

が与えられたとする。任意の接ベクトル $Z \in T(P)$ は

$$Z = ds_i(X)\,a + s_i(x)\,aA,\quad a \in G,\quad A \in \mathfrak{g},$$

$$X = \pi Z \in T_x(U_i),\quad x \in U_i$$

の形に書くことができるから

$$\omega(Z) = ad(a^{-1})\,\omega_i(X) + A$$

とおけば，変換法則より，P上の 1－form

$$\omega : T(P) \to \mathfrak{g}$$

はZの表わし方に関係なく定まり，これはP上の接続形式となる。

<u>定義</u>　微分多様体Mの接標構バンドルP（M，GL（n））上の 接続をMの<u>線形接続</u>または<u>アフィン接続</u>という。

Mを局所座標系 $\{U_i\}_{i \in I}$ で被覆し，各 U_i 上の local sections として自然標構

$$s_i : U_i \to P,\quad x \to \left(\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$$

をとる。 U_i, U_j における局所座標をそれぞれ (x^λ)， (x'^λ) とすれば，転移函数は

$$\frac{\partial}{\partial x'^\lambda} = \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda}$$

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(n),\quad x \to \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda}\right)$$

で与えられる（Ⅲ，§3）。いま，M上の線形接続

$$\omega : T(P) \to \mathfrak{gl}(n)$$

が与えられたとする。 $\{U_i\}_{i \in I}$ 上の接続形式 $\omega_i = \omega \circ ds_i$ は

$$\omega_i : T(U_i) \to \mathfrak{gl}(n)$$

$$\omega_i = (\omega^\lambda_\mu)\text{：行列},\quad \omega^\lambda_\mu : T(U_i) \to R : 1-\text{form},$$

で表わされる。命題より，変換法則は

$$(\omega'^\lambda_\mu) = \left(\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\right)(\omega^\alpha_\beta)\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\right) + \left(\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\right)\left(d\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\right)$$

で与えられる。更に

$$\omega^\lambda_\mu = \sum_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)\,dx^\nu,\quad \omega'^\lambda_\mu = \sum_\nu \Gamma'^\lambda_{\mu\nu}(x')\,dx'^\nu$$

とおけば，

$$dx'^\nu = \sum_\sigma \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}\,dx^\sigma,$$

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\beta,\sigma} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma} + \sum_{\alpha} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}$$

となる。これはアフィン接続の変換法則としてよく知られている式である。

アフィン接続はまた，局所座標を用いずに次の形で述べられる。

微分多様体Mの接標構バンドル $P(M, GL(n), \pi)$ の基本列を

$$0 \to L(M) \xrightarrow{\lambda} Q(M) \xrightarrow{\pi} T(M) \to 0$$

とするとき，アフィン接続は準同型

$$\omega : Q(M) \to L(M), \quad \omega \circ \lambda = 1$$

で与えられる。ところが $\mathfrak{gl}(n) \cong \mathrm{End}\,(R^n)$ であるから

$$L(M) = P \times_{ad\,(GL(n))} \mathfrak{gl}(n) \cong \mathrm{End}\; T(M)$$

となる（II，§6）。詳しくいえば，写像χを

$$\chi : P \times \mathfrak{gl}(n) \to \mathrm{End}\; T(M), \quad (p, A) \to \chi(p, A),$$

$$\chi(p, A) : T_x(M) \to T_x(M), \quad x = \pi(p),$$

$$\sum_{\lambda} e_{\lambda} y^{\lambda} \to \sum_{\lambda,\mu} e_{\lambda} A^{\lambda}_{\mu} y^{\mu}, \quad (y^{\lambda}) \in R^n,$$

$$p = (e_{\lambda}) \in P : \text{標構}, \quad A = (A^{\lambda}_{\mu}) \in \mathfrak{gl}(n) : \text{行列},$$

で定義する。一方，正則行列

$$a = (a^{\lambda}_{\mu}) \in GL(n), \quad \det a \neq 0,$$

に対して

$$ad\,(a)\, A = aAa^{-1}, \quad A = (A^{\lambda}_{\mu}) \in \mathfrak{gl}(n),$$

であるから，自己準同型$\chi(p, A)$の定義により

$$\chi(pa, A) = \chi(p, aAa^{-1}),$$

$$p \in P, \quad a \in GL(n), \quad A \in \mathfrak{gl}(n)$$

が成り立つ。よって写像χは実はバンドル$L(M)$の主写像である。即ち

$$L(M) \cong \mathrm{End}\; T(M)$$

となる。それゆえMのアフィン接続は準同型

$$\omega : Q(M) \to \mathrm{End}\; T(M), \quad \omega \circ \lambda = 1$$

と見なされ，更に$Q(M)$の元は接ベクトル $X \in T(P)$ で代表されるから，写像

$$\omega : T_p(P) \to \mathrm{End}\; T_x(M), \quad \pi(p) = x, \quad p \in P,$$

を表わすと考えられる。そこで，任意の接ベクトル $X \in T(P)$ に対して

$$d \equiv \omega(X) \in \mathrm{End}\; T(M)$$

と書くことにすれば，標構 $p = (e_{\lambda}) \in P$, $e_{\lambda} \in T_x(M)$,

に対して，この自己準同型 $d : T_x(M) \to T_x(M)$ は

$$d\, e_{\lambda} = \sum_{\lambda} \omega^{\mu}_{\lambda}\, e_{\mu},$$

$$\omega^{\mu}_{\lambda} : T(P) \to R \;:\; 1\text{-form}$$

で与えられる。これはアフィン接続形式を行列

$$(\omega^{\mu}_{\lambda}) : T(P) \to \mathfrak{gl}(n)$$

で表わしたものである。

§3. 共 変 微 分

主バンドル $P(M, G, \pi)$ 上に接続が与えられたとし，その水平射影，鉛直射影および接続形式をそれぞれ

$$h : T(P) \to T(P), \quad v : T(P) \to T(P),$$

$$\omega : T(P) \to \mathfrak{g}$$

とする。

命題1　P上の値域Vのk−form $\theta : T^k(P) \to V$に対して，

(1) $\theta h : T^k(P) \to V$は水平形式である。

(2) θが水平形式であるための条件は　$\theta h = \theta$ 。

（証明）(1) 鉛直ベクトルX_1に対して，$hX_1 = 0$であるから，

$$\theta h(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_k) = \theta(0, hX_2, \cdots\cdots, hX_k) = 0$$

となる。即ち，θhは水平形式である。

(2) $\theta h = \theta$ならば，(1)よりθは水平形式である。逆に，θが水平形式ならば，鉛直ベクトルを含む項は0となるから，

$$\theta(X_1,\ldots\ldots,X_k) = \theta(hX_1+vX_1,\ldots\ldots,hX_k+vX_k)$$
$$= \theta(hX_1,\ldots\ldots,hX_k)$$

となる。即ち，$\theta = \theta h$ である。

<u>定義</u>1　P上の値域Vの k−form $\theta : T^k(P) \to V$ に対して，$(k+1)$−form

$$D\theta = (d\theta)h \ : \ T^{k+1}(P) \to V$$

をform θ の<u>共変微分</u>という。

共変微分 $D\theta$ は，命題1より，必ず水平形式である。

<u>命題</u>2　P<u>上の</u> (ρ, V) <u>型反変 k−form</u> $\theta : T^k(P) \to V$ <u>に対して</u>，

(1) θh <u>は</u> (ρ, V) <u>型テンソル的 k−formである。</u>

(2) $d\theta$ <u>は</u> (ρ, V) <u>型反変 $(k+1)$−formである。</u>

(3) $D\theta$ <u>は</u> (ρ, V) <u>型テンソル的 $(k+1)$−formである。</u>

（証明） (1) 命題1より，θh は水平形式である。また

$$\theta h \circ R_a = \theta R_a \circ h = \rho(a^{-1})\,\theta h, \quad a \in G.$$

(2) 元 $a \in G$ を固定するとき，右移動 $R_a : P \to P$ は微分同型で，変換 $\rho(a^{-1}) : V \to V$ は一次変換であるから，

$$d\theta \circ R_a = d(\theta \circ R_a) = d(\rho(a^{-1})\theta) = \rho(a^{-1})\,d\theta.$$

(3) $D\theta = (d\theta)h$ であるから，(1),(2)より明らか。

<u>定義</u>2　接続形式 $\omega : T(P) \to \mathfrak{g}$ の共変微分

$$\Omega = D\omega \ : \ T^2(P) \to \mathfrak{g}$$

をこの接続の<u>曲率形式</u>という。

<u>命題</u>3　<u>曲率形式 Ω は $(ad, \mathfrak{g})$ 型テンソル的2−formである。</u>

（証明）　接続形式 ω は $(ad, \mathfrak{g})$ 型反変形式であるから，命題2よりこの結果を得る。　（証明終）

点 $p \in P$ における任意の接ベクトル $X \in T_p(P)$ に対して，点 p の近傍で定義されるベクトル場 X^* をとり，

$$vX^* \text{は基本ベクトル場}, \qquad X^*_p = X,$$

であるようにできる。それゆえ，P上の k−form θ の値

$$\theta(X_1,\ldots\ldots,X_k), \quad X_1,\ldots\ldots, \quad X_k \in T_p(P)$$

を計算するとき，始めから $X_1,\ldots\ldots,X_k$ をベクトル場と見なし，かつ $vX_1,\ldots\ldots,$

vX_k は基本ベクトル場であると仮定してよい。

このことを用いて次の二つの定理が証明される。

<u>定理</u>1　<u>接続 ω の曲率形式 Ω は，構造方程式</u>

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

<u>で与えられる。</u>

（証明）　ここにform $[\omega, \omega]$ とは，双一次写像

$$F : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad F(A, B) = [A, B],$$

にform ω を代入したものである（I，§4，定義2）。　よって，

$$[\omega, \omega](X, Y) = [\omega(X), \omega(Y)], \quad X, Y \in T_p(P),$$

で与えられる。先ず，構造方程式の右辺が水平形式となることを証明する。それにはP上のベクトル場 X，$Y = Y_1 + Y_2$ をとり，X，Y_1 は基本ベクトル場で，Y_2 は水平ベクトル場と仮定し，

$$\left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]\right)(X, Y) = 0$$

が成り立つことをいえばよい。基本ベクトル場 X，Y_1 に対して，$\omega(X)$，$\omega(Y_1) \in \mathfrak{g}$ は一定で，$[X, Y_1]$ もまた基本ベクトル場である。したがって

$$X\omega(Y_1) = Y_1\omega(X) = 0, \quad \omega([X, Y_1]) = [\omega(X), \omega(Y_1)],$$

となる。I，§6，公式（6，6）より

$$d\omega(X, Y_1) = \frac{1}{2}\{X\omega(Y_1) - Y_1\omega(X) - \omega([X, Y_1])\}$$
$$= -\frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y_1)]$$
$$= -\frac{1}{2}[\omega, \omega](X, Y_1).$$

ゆえに，　$\left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]\right)(X, Y_1) = 0$

である。また，水平ベクトル場 Y_2 に対して，$\omega(Y_2) = 0$ であるから，

$$\left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]\right)(X, Y_2) = d\omega(X, Y_2) + \frac{1}{2}[\omega(X), \underset{\overset{\parallel}{0}}{\omega(Y_2)}]$$
$$= \frac{1}{2}\{X\omega(Y_2) - Y_2\omega(X) - \omega([X, Y_2])\}$$

$$=-\frac{1}{2}\omega\,([X, Y_2]).$$

となる。 一定元$\omega(X)\in\mathfrak{g}$に対応するGの1径数部分群

$$\varphi_t = \exp\ t\ \omega(X)$$

をとれば，II，§9，命題3より，

$$[X, Y_2] = \mathcal{L}_X Y_2 = \frac{d}{dt}(Y_2\varphi_t)_{t=0}$$

となる。 Y_2は水平だから $Y_2\varphi_t$ も水平，したがつて

$$\frac{d}{dt}(Y_2\varphi_t)_{t=0} = [X, Y_2]$$

もまた水平ベクトル場である。ゆえに，$\omega([X, Y_2]) = 0$ ，即ち

$$(d\omega+\frac{1}{2}[\omega, \omega])\ (X, Y_2) = 0$$

である。 結局

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]\quad (X, Y) = 0$$

が成り立つから，$d\omega+\frac{1}{2}[\omega, \omega]$は水平形式である。命題1および$\omega h = 0$（§1，命題3）より，

$$d\omega+\frac{1}{2}[\omega, \omega] = (d\omega+\frac{1}{2}[\omega, \omega])\,h$$
$$= d\omega h+\frac{1}{2}[\omega h, \omega h] = D\omega = \Omega.$$

定理2　P上の(ρ, V)型テンソル的k－form

$$\theta : T^k(P)\to V$$

の共変微分$D\theta$は，公式

$$D\theta = d\theta+\bar\rho(\omega)\,\theta$$

で与えられる。ここに，$\bar\rho : \mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ は，表現(ρ, V)から引き起されるLie代数の表現である。

（証明） ここにform $\bar\rho(\omega)\,\theta$とは，双一次写像

$$F : \mathfrak{g}\times V\to V,\qquad F(A, y) = \bar\rho(A)\ y$$

にforms ω, θを代入したものである。よつて，

$$(\bar\rho(\omega)\,\theta)\ (X_1, \cdots\cdots, X_{k+1})$$
$$= \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}\bar\rho(\omega(X_i))\,\theta(X_1,\cdots,\hat X_i,\cdots,X_{k+1})$$

で与えられる。先ず，$(k+1)$－form $d\theta+\bar\rho(\omega)\,\theta$ が水平形式であることを証明する。X_1を基本ベクトル場とすれば，θは水平形式であるから

$$\theta(X_1,\cdots,\hat X_i,\cdots,X_{k+1}) = 0,\quad 2\le i\le k+1,$$
$$\theta([X_i, X_j], X_1,\cdots,\hat X_i,\cdots,\hat X_j,\cdots,X_{k+1}) = 0,$$
$$2\le i<j\le k+1$$

である。したがつて

$$(1)\quad (\bar\rho(\omega)\,\theta)\ (X_1,\cdots,X_{k+1}) = \frac{1}{k+1}\ \bar\rho(\omega(X_1))\,\theta(X_2,\cdots,X_{k+1}),$$

$$(2)\quad d\theta(X_1,\cdots,X_{k+1}) = \frac{1}{k+1}X_1\theta(X_2,\cdots,X_{k+1})$$
$$+\sum_{j=2}^{k+1}\frac{(-1)^{j+1}}{k+1}\theta([X_1, X_j], X_2,\cdots,\hat X_j,\cdots,X_{k+1})$$
$$= \frac{1}{k+1}(\mathcal{L}_{X_1}\theta)\ (X_2,\cdots,X_{k+1})$$

が成り立つ（I，§6，定理およびI，§5，命題3）。

一定元$\omega(X_1)$に対応するGの1径数部分群

$$\varphi_t = \exp\ t\ \omega(X_1)$$

をとれば，反変形式θに対して，

$$\theta\circ R_{\varphi_t} = \rho(\varphi_t^{-1})\ \theta$$

である。これに微分 $(d/dt)_{t=0}$ を施せば，

$$\mathcal{L}_{X_1}\theta = \bar\rho(-\omega(X_1))\,\theta = -\bar\rho(\omega(X_1))\,\theta$$

となる（II，§9，命題3）。 ゆえに，(1)，(2)より

$$(d\theta+\bar\rho(\omega)\,\theta)\ (X_1,\cdots,X_{k+1}) = 0$$

が成り立つ。 即ち，form $d\theta+\bar\rho(\omega)\,\theta$は水平形式である。
命題1および$\omega h = 0$より，

$$d\theta+\overline{\rho}(\omega)\theta=(d\theta+\overline{\rho}(\omega)\theta)h$$
$$=d\theta h+\overline{\rho}(\omega h)\theta h=D\theta。\qquad \text{（証明終）}$$

定理２の公式は，テンソル解析でよく知られている共変微分の定義式をすべて含んでいる。たとえば，線型接続の場合，II，§５の終りに述べた種々の表現に対して，この公式をあてはめて見ればよい。なお，よく用いられる形として，次の二つの公式がある。

系　1　P上の（ad，$\mathfrak{g}$）型テンソル的形式θに対して，

$$D\theta=d\theta+[\omega,\theta]$$

（証明）　定理２における表現ρが，特に随伴表現

$$ad\ :\ G\to GL(\mathfrak{g})$$

の場合である。このとき，adから引き起される表現は

$$\overline{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),\quad \overline{ad}(A)B=[A,B],\quad A,B\in\mathfrak{g},$$

で与えられる（II，§5）。

系　2　P上のスカラー形式$\theta: T^k(P)\to V$に対して，

$$D\theta=d\theta$$

（証明）　定理２における表現ρが，特にtrivialな表現

$$\rho_0\ :\ G\to GL(V),\quad a\to 1,\quad a\in G,$$

の場合である。このとき，ρ_0から引き起される表現は

$$\overline{\rho}_0\ :\ \mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V),\quad A\to 0,\quad A\in\mathfrak{g},$$

で与えられる（II，§10）。

定理３　曲率形式Ωに対して，Bianchiの恒等式

$$D\Omega=0$$

が成り立つ。

（証明）　$d\circ d=0$，$\omega h=0$であるから

$$D\Omega=(d\Omega)h=\{d(d\omega+\tfrac{1}{2}[\omega,\omega])\}h$$
$$=[d\omega,\omega]h=[d\omega h,\omega h]=0。$$

定理４　P上の（ρ，V）型テンソル的形式θに対して，

Ricciの恒等式

$$D^2\theta=\overline{\rho}(\Omega)\theta$$

が成り立つ。

（証明）　$(d\omega)h=\Omega$，$\theta h=\theta$，$\omega h=0$であるから，

$$D^2\theta=(dD\theta)h=\{d(d\theta+\overline{\rho}(\omega)\theta)\}h$$
$$=(\overline{\rho}(d\omega)\theta-\overline{\rho}(\omega)d\theta)h$$
$$=\overline{\rho}(d\omega h)\theta h-\overline{\rho}(\omega h)d\theta h=\overline{\rho}(\Omega)\theta$$

命題４　水平形式に対して，Dは反微分である。即ち，

水平形式　$\theta: T^k(P)\to U$，　$\varphi: T^l(P)\to V$，

双一次写像　$F: U\times V\to W$，

とすれば，

$$DF(\theta,\varphi)=F(D\theta,\varphi)+(-1)^kF(\theta,D\varphi)$$

（証明）　$DF(\theta,\varphi)=(dF(\theta,\varphi))h$

$$=(F(d\theta,\varphi)+(-1)^kF(\theta,d\varphi))h$$
$$=F(d\theta h,\varphi h)+(-1)^kF(\theta h,d\varphi h)$$
$$=F(D\theta,\varphi)+(-1)^kF(\theta,D\varphi)$$

§4　等質空間上の不変接続

ここではPをLie群，GをPの閉部分群として，等質空間P／Gおよび主バンドルP（P／G，G）を考える。

群P，GのLie代数をそれぞれ

$$\mathfrak{p}=T_e(P),\qquad \mathfrak{g}=T_e(G)$$

とする。

$$\begin{array}{c} P \\ \big\downarrow\ G \\ P/G \end{array}$$

定義　等質空間P／G上の主バンドルP（P／G，G）の接続

$$\omega:\ T(P)\to\mathfrak{g}$$

が群Pの変換で不変であるとき，即ち

$$\omega(pX)=\omega(X),\quad p\in P,\quad X\in T(P),$$

が成り立つとき，ωを不変接続という。

$P(P/G, G)$ 上の不変接続では，群Pの単位元 e における水平ベクトル空間

$$H_e(P) \subset T_e(P) = \mathfrak{p}$$

を知れば，任意の点 $p \in P$ における水平ベクトル空間は

$$H_p(P) = pH_e(P)$$

で与えられる。実際，水平ベクトル $Y \in H_e(P)$ に対して，

$$\omega(pY) = \omega(Y) = 0,$$

即ち，$pY \in H_p(P)$ となり，逆も成り立つ。

定理 1　等質空間 P/G において，不変接続が存在するための必要十分条件は，P/G が分解的であること，即ち直和分解

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}, \quad ad(G)\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$$

が存在することである。そして，$\mathfrak{p}$ の部分空間 $\mathfrak{m}$ が，単位元 e における水平ベクトル空間を与える。

（証明）　先ず，$\omega : T(P) \to \mathfrak{g}$ を不変接続とし，

$$He(P) = \mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$$

とおけば，点 e における鉛直ベクトル空間は $V_e(P) = \mathfrak{g}$ であるから，直和分解

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$$

が定まる。そして，元 $a \in G$，水平ベクトル $Y \in \mathfrak{m}$ に対して，

$$\omega(Y) = 0,$$
$$\omega(ad(a)Y) = \omega(aYa^{-1}) = \omega(Ya^{-1})$$
$$= ad(a)\omega(Y) = 0 .$$

よって $ad(a)Y$ もまた点 e における水平ベクトルである。即ち

$$ad(G)\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$$

となり，P/G は分解的である（II，§7，定義 1）。

逆に，P/G は分解的で，一つの直和分解を

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}, \quad ad(G)\mathfrak{m} = \mathfrak{m},$$

とする。P上のベクトル・バンドル $H(P)$ を

$$H(P) = \bigcup_{p \in P} H_p(P), \quad H_p(P) = p\mathfrak{m},$$

で定義すれば，ベクトル・バンドルの直和分解

$$T(P) = V(P) \oplus H(P)$$

を得る。そして，元 $a \in G$，ベクトル $X \in H_p(P)$ に対して，

$$X = pY, \quad Y \in \mathfrak{m}, \quad ad(a^{-1})Y \in \mathfrak{m},$$
$$Xa = pYa = (pa)(a^{-1}Ya)$$
$$= (pa)\,ad(a^{-1})Y \in (pa)\mathfrak{m} = H_{pa}(P)。$$

よって $H(P)$ は主バンドル $P(P/G, G)$ の右移動で不変となり，これは $P(P/G, G)$ の接続を定義する。なお，$H(P)$ のつくり方から，この接続は不変接続である。（証明終）

次に，不変接続の接続形式を求めよう。以下，直和分解

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}, \quad ad(G)\mathfrak{m} = \mathfrak{m},$$

において，元 $A \in \mathfrak{p}$ の $\mathfrak{g}$―成分，$\mathfrak{m}$―成分をそれぞれ $A_{\mathfrak{g}}$，$A_{\mathfrak{m}}$ で表わす。即ち，元 $A \in \mathfrak{g}$ は一意的に

$$A = A_{\mathfrak{g}} + A_{\mathfrak{m}}, \quad A_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{g}, \quad A_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{m},$$

と分けられる。

命題 1　分解的等質空間 P/G において，直和分解を

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}, \quad ad(G)\mathfrak{m} = \mathfrak{m},$$

とする。群PのMaurer―Cartan form $\tilde{\omega}$ を分解して，

$$\tilde{\omega} : T(P) \to \mathfrak{p}, \quad X \to p^{-1}X,$$
$$\tilde{\omega} = \omega + \varphi, \quad \omega = \tilde{\omega}_{\mathfrak{g}}, \quad \varphi = \tilde{\omega}_{\mathfrak{m}}$$

とすれば，

(1) $\omega : T(P) \to \mathfrak{g}$ は $P(P/G, G)$ の不変接続である。

(2) $\varphi : T(P) \to \mathfrak{m}$ は $P(P/G, G)$ 上の $(ad, \mathfrak{m})$ 型の左不変なテンソル的 1―formである。

逆に，$P(P/G, G)$ の任意の不変接続 ω はこのようにして与えられる。

（証明）　Maurer―Cartan form $\tilde{\omega}$ は左不変であるから，

$$\omega(pX) + \varphi(pX) = \tilde{\omega}(pX)$$
$$= \tilde{\omega}(X) = \omega(X) + \varphi(X),$$
$$\omega(pX) = \omega(X), \ \varphi(pX) = \varphi(X), \quad p \in P, \quad X \in T(P)$$

となり，ω，φ もまた左不変である。一方

$$ad(G)\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \quad ad(G)\mathfrak{m} = \mathfrak{m},$$
$$\omega(Xa) + \varphi(Xa) = \tilde{\omega}(Xa) = ad(a^{-1})\tilde{\omega}(X)$$
$$= ad(a^{-1})\omega(X) + ad(a^{-1})\varphi(X), \ a \in G, \quad X \in T(P),$$

であるから，

$$\omega o R_a = ad\,(a^{-1})\,\omega,\quad \varphi o R_a = ad\,(a^{-1})\,\varphi,\quad a\in G,$$

が成り立つ。更に，任意の鉛直ベクトル $X\in V_p(P)$ に対して，

$$X = pB,\ p\in P,\quad B\in\mathfrak{g},\quad (\text{Ⅱ},\ \S 8,\ \text{命題}1),$$

$$\omega(X)+\varphi(X) = \tilde{\omega}(X) = \tilde{\omega}(pB) = B\in\mathfrak{g},$$

であるから，

$$\omega(X) = B = p^{-1}X,\quad \varphi(X) = 0,\quad X\in V_p(P),$$

が成り立つ。よつて (1)，(2) は証明された。

逆に，$\omega: T(P)\to\mathfrak{g}$ を不変接続とすれば，ω はP上の左不変形式であるから

$$\omega = F(\tilde{\omega}),\quad F:\mathfrak{p}\to\mathfrak{g}\ :\text{一次写像}$$

の形で書くことができる（Ⅱ，§3，定理2）。またωは接続だから，

$$\mathrm{Im}F = \mathfrak{g},\quad FoF = F,$$

$$Foad\,(a) = ad\,(a)\,F,\quad a\in G,$$

でなければならない。そこで$\mathrm{Ker}\ F = \mathfrak{m}$とおけば，直和分解

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g}+\mathfrak{m},\quad ad\,(G)\,\mathfrak{m} = \mathfrak{m},$$

が得られ，

$$\tilde{\omega} = \omega+\varphi,\quad \omega = \tilde{\omega}_{\mathfrak{g}},\quad \varphi = \tilde{\omega}_{\mathfrak{m}},$$

となる。　　　　（証明終）

分解的等質空間P／Gにおいて，直和分解

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g}+\mathfrak{m},\quad ad\,(G)\,\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$$

をとるとき，上に述べた接続$\omega = \tilde{\omega}_{\mathfrak{g}}$ をこの直和分解に対応する正準接続（canonical connection）という。等質空間P／Gにおいて，このような直和分解のとり方は一般に一意的ではない。したがつて，一つの直和分解に対応する正準接続以外にも不変接続は存在し得る。しかしこれらはそれぞれ他の直和分解に対応する正準接続になつている。

命題2　分解的等質空間P／Gにおいて，群PのMaurer–Cartan form $\tilde{\omega}$を分解して

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g}+\mathfrak{m},\quad ad\,(G)\,\mathfrak{m} = \mathfrak{m},$$

$$\tilde{\omega} = \omega+\varphi,\quad \omega = \tilde{\omega}_{\mathfrak{g}},\quad \varphi = \tilde{\omega}_{\mathfrak{m}},$$

とする。正準接続ωの曲率形式Ω，およびテンソル的形式φの共変微分$D\varphi$は，それぞれ公式

$$\Omega = -\frac{1}{2}[\varphi,\varphi]_{\mathfrak{g}},\quad D\varphi = -\frac{1}{2}[\varphi,\varphi]_{\mathfrak{m}}$$

で与えられる。更に，P／Gが対称等質空間であれば，

$$\Omega = -\frac{1}{2}[\varphi,\varphi],\quad D\varphi = 0$$

となる。

（証明）　群Pの構造方程式（Ⅱ，§3，定理1）より，

$$d\tilde{\omega} = -\frac{1}{2}[\tilde{\omega},\tilde{\omega}],\quad \tilde{\omega} = \omega+\varphi,$$

$$d\omega + d\varphi = -\frac{1}{2}[\omega+\varphi,\ \omega+\varphi]$$

$$= -\frac{1}{2}[\omega,\omega]-[\omega,\varphi]-\frac{1}{2}[\varphi,\varphi]$$

ゆえに，§3，定理1および定理2，系1より，

$$\left(d\omega+\frac{1}{2}[\omega,\omega]\right) + \left(d\varphi+[\omega,\varphi]\right) = -\frac{1}{2}[\varphi,\varphi],$$

$$\Omega + D\varphi = -\frac{1}{2}[\varphi,\varphi]$$

を得る。ところが

$$\Omega: T^2(P)\to\mathfrak{g},\quad D\varphi: T^2(P)\to\mathfrak{m}$$

であるから

$$\Omega = -\frac{1}{2}[\varphi,\varphi]_{\mathfrak{g}},\quad D\varphi = -\frac{1}{2}[\varphi,\varphi]_{\mathfrak{m}}.$$

更に，P／Gが対称，即ち$[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{g}$ であれば

$$\varphi: T(P)\to\mathfrak{m},\quad [\varphi,\varphi]: T^2(P)\to\mathfrak{g}$$

となるから

$$\Omega = -\frac{1}{2}[\varphi,\varphi],\quad D\varphi = 0.$$　　　　（証明終）

等質空間P／Gの接ベクトル・バンドルT（P／G）は，群Gの等方性表現から定まるP（P／G，G）の同伴バンドル

$$T(P/G)\cong P\times_{is(G)}\mathfrak{m},\quad \mathfrak{m} = T_e(P/G),$$

として与えられる（Ⅲ，§7，定理2）。よつて，群の準同型

$$is:\ G\to GL(\mathfrak{m})$$

より定まるP（P／G，G）の拡大（iii，§5，定理2）

$$\alpha : P(P/G,\ G) \to P'(P/G,\ GL(\mathfrak{m}))$$

をとれば，主バンドルP′（P／G，GL（$\mathfrak{m}$））は等質空間P／Gの接標構バンドルを与える。

また，元p∈Pによる変換

$$L_p : P/G \to P/G, \quad x \to px, \quad x \in P/G,$$

からの誘導写像

$$L_p : T(P/G) \to T(P/G)$$

は，ベクトル・バンドルT（P／G）を自身に移すバンドル写像である。したがつて，接標構バンドルP′（P／G，GL（$\mathfrak{m}$））を自身に移すバンドル写像

$$\tilde{L}_p : P' \to P', \quad (e_\lambda) \to (p\,e_\lambda), \quad (e_\lambda) \in P',$$

が定まる。即ち，群PはP′上の変換群として作用している。

そこで，P′上のform Φが

$$\Phi \circ \tilde{L}_p = \Phi, \quad p \in P$$

をみたすとき，ΦをP′上のP－不変形式と呼ぶことにする。

いま，P／Gは分解的であるとし，一つの直和分解

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}, \quad ad(G)\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$$

を固定する。このとき$\mathfrak{m}$上では

$$ad(a) = is(a), \quad a \in G,$$

と見なしてよい。P（P／G，G）上の正準接続ωのバンドル準同型 $\alpha : P \to P'$ による拡大（§1）をω′とすれば，

$$\omega' : T(P') \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$$

はP／G上のアフィン接続である。これを正準アフィン接続という。

命題3　分解的等質空間P／Gにおいて，正準アフィン接続

$$\omega' : T(P') \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$$

はP－不変である。

（証明）　正準接続ωのαによる拡大がω′であるから

$$\overline{is} \circ \omega = \omega' \circ \alpha \qquad \begin{tikzcd} T(P) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\overline{is}"] \\ T(P') \arrow[r, "\omega'"] & \mathfrak{gl}(\mathfrak{m}) \end{tikzcd}$$

となる。また

$$\omega \circ L_p = \omega, \quad p \in P,$$

であるから，

$$\omega' \circ \tilde{L}_p \circ \alpha = \omega' \circ \alpha \circ L_p$$

$$= \overline{is} \circ \omega \circ L_p = \overline{is} \circ \omega = \omega' \circ \alpha,$$

$$\omega' \circ \tilde{L}_p = \omega', \quad p \in P,$$

が成り立つ。即ち，ω′はP－不変である。

定理2　分解的等質空間P／G上のP－不変なアフィン接続全体と，等方性不変な双一次写像

$$F : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}, \quad F \circ is(a) = is(a)\,F, \quad a \in G,$$

全体とは1対1に対応する。

（証明）　簡単のため，P／G上のP－不変アフィン接続全体の集合を$\{\omega\}$，接標構バンドルP′（P／G，GL（$\mathfrak{m}$））上のP－不変な（ad，$\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$）型テンソル的1－forms全体の集合を$\{\theta\}$，そして等方性不変な双一次写像$\mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$全体の集合を$\{F\}$で表わす。　一般線型群GL（$\mathfrak{m}$）の随伴表現

$$ad : GL(\mathfrak{m}) \to GL(\mathfrak{gl}(\mathfrak{m}))$$

から定まるP′（P／G，GL（$\mathfrak{m}$））の同伴バンドルは

$$L(P/G) \cong \mathrm{End}\ T(P/G)$$

で与えられる（§2）。　そこで，P／Gの正準アフィン接続

$$\omega_0 : T(P') \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$$

をとれば，対応

$$\{\theta\} \to \{\omega\}, \quad \theta \to \omega = \omega_0 + \theta$$

は明らかに1対1である。　一方，テンソル的形式$\theta \in \{\theta\}$は，ベクトル・バンドルの準同型

$$\theta : T(P/G) \to \mathrm{End}\ T(P/G)$$

と見なされ（Ⅱ，§10，命題3），これは更にP－不変の条件

$$\theta(pX)(pY) = p(\theta(X)\,Y),$$

$$X, Y \in T_x(P/G), \quad x \in P/G, \quad p \in P,$$

をみたす。それゆえ，特に

$$F(A, B) = \theta(A)B, \quad A, B \in \mathfrak{m} \cong T_e(P/G),$$

とおけば，双一次写像

$$F: \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m},$$
$$F(aA, aB) = aF(A, B), \quad a \in G,$$

が定まり，$F \in \{F\}$である。逆に，双一次写像$F \in \{F\}$に対して

$$\theta(pA)(pB) = pF(A, B), \quad A, B \in \mathfrak{m}, \quad p \in P,$$

とおけば，ベクトル・バンドルの準同型

$$\theta: T(P/G) \to \mathrm{End}\ T(P/G)$$

が矛盾なく定まり，$\theta \in \{\theta\}$となる。即ち，対応

$$\{F\} \to \{\theta\}, \quad F \to \theta,$$
$$F(A, B) = \theta(A)B, \quad A, B \in \mathfrak{m},$$

は1対1である。

§5 等質空間上の不変微分形式

PをLie群，GをPの閉部分群とし，等質空間P/Gをとる。群PはP上の左移動群およびP/G上の左変換群として作用し，群Gは主バンドル$P(P/G, G, \pi)$の右移動群として作用する。これらの作用をそれぞれ

$$L_p: P \to P, \quad x \to px, \quad p, x \in P,$$
$$L_p: P/G \to P/G, \quad y \to py, \quad p \in P, \quad y \in P/G,$$
$$R_a: P \to P, \quad p \to pa, \quad a \in G, \quad p \in P,$$

で表わすとき，関係

$$\pi \circ L_p = L_p \circ \pi, \quad \pi \circ R_a = \pi, \quad p \in P, \quad a \in G,$$

がみたされる。

いま，ΦをP/G上の実値域の不変k次形式とする。即ち，

$$\Phi: T^k(P/G) \to R$$
$$\Phi(pY_1, \cdots\cdots, pY_k) = \Phi(Y_1, \cdots\cdots, Y_k),$$
$$Y_1, \cdots\cdots, Y_k \in T_y(P/G), \quad y \in P/G, \quad p \in P,$$

とする。このとき，$\Phi = \Phi \circ \pi$とおくことにより，ΦはまたP上のformと見なされ，

これは主バンドル$P(P/G, G, \pi)$のスカラー形式である（III，§10，定義4）。ゆえに，

(i) $\Phi \circ L_p = \Phi, \quad p \in P,$

(ii) $\Phi \circ R_a = \Phi, \quad a \in G,$

(iii) Φは水平形式，

が成り立つ。結局，P/G上の不変形式とは，条件(i)，(ii)，(iii)をみたすP上のformと見なしてよい。

命題　P/Gを分解的等質空間とし，群PのMaurer–Cartan form $\tilde{\omega}$ の分解

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}, \quad ad(G)\mathfrak{m} = \mathfrak{m},$$
$$\tilde{\omega} = \omega + \varphi, \quad \omega = \tilde{\omega}_{\mathfrak{g}}, \quad \varphi = \tilde{\omega}_{\mathfrak{m}},$$

をとる。P/G上の任意の不変形式Φは，これをP上のformと見なせば，

$$\Phi = F(\varphi, \cdots\cdots, \varphi)$$

の形で与えられる。ここにFは$ad(G)$で不変な$\mathfrak{m}$上の多項式

$$F: \mathfrak{m} \times \cdots\cdots \times \mathfrak{m} \to R: \text{対称複一次},$$
$$F \circ ad(a) = F, \quad a \in G,$$

である。

（証明）　正準接続ωの水平射影をhとすれば，

$$h: T(P) \to T(P), \quad \omega h = 0,$$
$$\varphi h = \varphi, \quad \varphi \circ R_a = ad(a^{-1})\varphi, \quad a \in G,$$

である（§4，命題1）。先ず，条件(i)より，form Φは，

$$\Phi = F(\tilde{\omega}, \cdots\cdots, \tilde{\omega}), \quad F: \mathfrak{p}\text{上の多項式},$$

の形に書ける（II，§3，定理2）。条件(iii)より，

$$\Phi = \Phi h = F(\omega + \varphi, \cdots\cdots, \omega + \varphi)h$$
$$= F(\omega h + \varphi h, \cdots\cdots, \omega h + \varphi h) = F(\varphi, \cdots\cdots, \varphi)$$

となる。よって多項式Fは$\mathfrak{m}$上だけで定義されていればよい。

また，条件(ii)より，

$$F(\varphi, \cdots\cdots, \varphi) = F(\varphi, \cdots\cdots, \varphi) \circ R_a$$
$$= F(ad(a^{-1})\varphi, \cdots\cdots, ad(a^{-1})\varphi), \quad a \in G,$$

となる。そして，一次写像

$$\varphi: T_p(P) \to \mathfrak{m}, \quad p \in P,$$

はontoであるから

$$F = F \circ ad\,(a)\ ,\qquad a \in G\ ,$$

が成り立つ。逆に，このようなFに対して，formF（φ，……，φ）は明らかに条件(i)，(ii)，(iii)をみたす。

定理　対称等質空間P／G上の任意の不変形式は，外微分dによるコサイクルである。

（証明）　P／Gが対称等質空間であれば，

$$D\varphi = 0\ ,\qquad \tilde{\omega} = \omega + \varphi\ ,$$

となる（§4，命題2）。　また，スカラー形式Φに対しては

$$D\Phi = d\Phi$$

であるから，任意の不変形式F（φ，……，φ）に対して

$$\begin{aligned} dF(\varphi, \cdots\cdots, \varphi) &= DF(\varphi, \cdots\cdots, \varphi) \\ &= \Sigma \pm F(\varphi, \cdots\cdots, D\varphi, \cdots\cdots, \varphi) = 0 \end{aligned}$$

となる。　　　　（証明終）

ここで，Pをコンパクト，連結なLie　群，GをPの閉部分群とし，等質空間P／Gの実係数コホモロジー環を

$$H^*(P/G, R) = \sum_{k \geq 0} H^k(P/G, R)$$

とする。空間P／G上の実値域のforms全体は，外微分dによってコチエイン複体

$$A(P/G) = \sum_{k \geq 0} A^k(P/G) \qquad \text{（直和）}$$

$$A^k(P/G) = \{k\text{-forms}\}\ ,$$

$$d : A^k(P/G) \to A^{k+1}(P/G)\ ,\qquad d \circ d = 0\ ,$$

をつくる。　この複体のコホモロジー環を

$$H^*(A) = \sum_{k \geq 0} H^k(A)$$

とすれば，de　Rhamの定理（V，§6参照）により，

$$H^*(A) \cong H^*(P/G, R)$$

である。いま，等質空間P／G上の実値域不変形式全体を

$$I(P/G) = \sum_{k \geq 0} I^k(P/G)\ ,$$

$$I^k(P/G) = A^k(P/G) \cap I(P/G)\ ,$$

とすれば，injection

$$\tau : I^k(P/G) \to A^k(P/G)\ ,\quad \Phi \to \Phi\ ,\qquad k \geq 0\ ,$$

$$d \circ \tau = \tau \circ d\ ,$$

により，I（P／G）はA（P／G）の部分複体となる。そこで写像

$$\mu : A^k(P/G) \to I^k(P/G)\ ,\ \Phi \to \mu\Phi,\qquad k \geq 0\ ,$$

$$\mu\Phi = \int_P (\Phi \circ L_p)\, dp \qquad \text{（Haar測度による積分）}$$

$$d \circ \mu = \mu \circ d\ ,\qquad \mu \circ \tau = 1\ ,$$

をとれば，μは複体の準同型である。二つの準同型τ，μから引き起されるコホモロジー環の準同型をそれぞれ

$$\tau^* : H^*(I) \to H^*(A)\ ,\quad \mu^* : H^*(A) \to H^*(I)\ ,$$

$$\mu^* \circ \tau^* = 1\ ,$$

とすれば，コサイクルΦ∈A^k（P／G），　$d\Phi = 0$，に対して

$$\Phi \simeq \tau \circ \mu\Phi \qquad \text{(cohomologous)}$$

であるから，$\tau^* \circ \mu^* = 1$となる。　ゆえに

$$\tau^* : H^*(I) \cong H^*(A) \cong H^*(P/G, R)$$

が成り立つ。特に，P／Gが対称等質空間であれば，上の定理により，複体I（P／G）はtrivial，即ち　$d = 0$であるから，

$$H^*(I) = I(P/G) \cong H^*(P/G, R)$$

を得る。

§6 誘導接続

P(M，G)を主バンドル，HをGの閉部分群とする。等質空間G/Hは分解的であると仮定し，直和分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{f}, \qquad ad(H)\,\mathfrak{f}=\mathfrak{f},$$

をとる。更にHを群の直積

$$H=H_1\times H_2$$

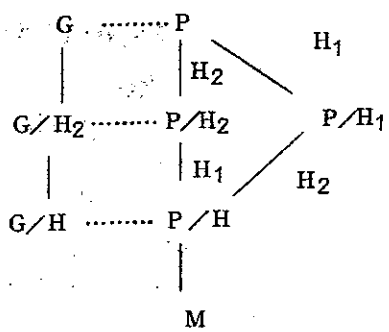
に分ける。ただし，$H_2=e$ であつてもよいので，これは群Hを特に制限するものではない。このとき，P(M，G)から，次の主バンドルが導かれる(Ⅱ，§4)。

P(P/H，H)，

P(P/H_1，H_1)， P(P/H_2，H_2)，

P/H_2(P/H，H_1)，

P/H_1(P/H，H_2)。



また，群H_1，H_2のLie代数をそれぞれ，$\mathfrak{h}_1$，$\mathfrak{h}_2$とすれば，直和分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}_1+\mathfrak{f}+\mathfrak{h}_2, \qquad \mathfrak{h}=\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2$$

を得る。いま，P(M，G)上の接続

$$\tilde{\omega}: T(P)\to\mathfrak{g}=\mathfrak{h}_1+\mathfrak{f}+\mathfrak{h}_2$$

が与えられたとし，form $\tilde{\omega}$ を各成分に分解して

$$\omega=\tilde{\omega}_{\mathfrak{h}}, \quad \omega_1=\tilde{\omega}_{\mathfrak{h}_1}, \quad \omega_2=\tilde{\omega}_{\mathfrak{h}_2}, \quad \psi=\tilde{\omega}_{\mathfrak{f}},$$

$$\tilde{\omega}=\omega_1+\psi+\omega_2, \qquad \omega=\omega_1+\omega_2$$

とする。このとき，次の命題が成立する。

命題1 主バンドルP(P/H_2，H_2)上のform

$$\omega_1: T(P)\to\mathfrak{h}_1$$

はスカラー形式である。よつて，これを空間P/H_2上のform

$$\omega_1: T(P/H_2)\to\mathfrak{h}_1$$

と見なせば，ω_1は主バンドルP/H_2(P/H，H_1)上の接続形式となる。

この接続ω_1を接続$\tilde{\omega}$からのP/H_2(P/H，H_1)上への誘導接続という。ここで，群H_1とH_2との役割を交換すれば，form

$$\omega_2: T(P/H_1)\to\mathfrak{h}_2$$

は主バンドルP/H_1(P/H，H_2)上への誘導接続である。また

$H'_1=H$， $H'_2=e$ と考えれば， form

$$\omega: T(P)\to\mathfrak{h}, \qquad \omega=\omega_1+\omega_2$$

はP(P/H，H)上への誘導接続である。上の命題1をも含めて，これらを次の定理にまとめておこう。

定理1 主バンドルP(M，G)の接続$\tilde{\omega}$の分解

$$\tilde{\omega}=\omega_1+\psi+\omega_2, \qquad \omega=\omega_1+\omega_2,$$

において

(1) ω_1はP/H_2(P/H，H_1)上への誘導接続である。

(2) ψはP(P/H，H)上の(ad，$\mathfrak{f}$)型テンソル的1－formsである。

(3) ω_2はP/H_1(P/H，H_2)上への誘導接続である。

(4) ωはP(P/H，H)上への誘導接続である。

(証明) 先ず，(2)，(4)を証明する。

$$\tilde{\omega}=\omega+\psi, \quad \omega=\tilde{\omega}_{\mathfrak{h}}, \quad \psi=\tilde{\omega}_{\mathfrak{f}},$$

$$ad(H)\,\mathfrak{h}=\mathfrak{h}, \quad ad(H)\,\mathfrak{f}=\mathfrak{f},$$

であるから

$$\omega\circ R_b+\psi\circ R_b=\tilde{\omega}\circ R_b=ad(b^{-1})\,\tilde{\omega}$$
$$=ad(b^{-1})\,\omega+ad(b^{-1})\,\psi,$$
$$\omega\circ R_b=ad(b^{-1})\,\omega, \quad \psi\circ R_b=ad(b^{-1})\,\psi, \quad b\in H,$$

となる。また， P(P/H，H)の任意の鉛直ベクトルXに対して，

$$X=pB, \quad p\in P, \quad B\in\mathfrak{h}, \quad (Ⅱ，§8，命題1),$$

$$\omega(pB)+\psi(pB)=\tilde{\omega}(pB)=B\in\mathfrak{h},$$

$$\omega(X)=B=p^{-1}X, \quad \psi(X)=0,$$

となる。よつて(2)，(4)が成り立つ。

次に，(1)，(3)は同じもので，結局，命題1を証明すればよい。群の直積分解 $H=H_1\times H_2$ において， $\mathfrak{h}_1$のすべての元は$ad(H_2)$で不変である。したがつ

て

$$\omega_1 \circ R_b = (\tilde{\omega}\circ R_b)_{\mathfrak{h}_1} = (ad\,(b^{-1})\tilde{\omega})_{\mathfrak{h}_1}$$
$$= ad\,(b^{-1})\,\omega_1 = \omega_1 \;, \quad b \in H_2 \;,$$

となる。また，P（$P/H_2, H_2$）の任意の鉛直ベクトルXに対して，

$$X = pB, \quad p \in P, \quad B \in \mathfrak{h}_2,$$
$$\tilde{\omega}\,(pB) = B \in \mathfrak{h}_2 \;,$$
$$\omega_1\,(X) = \omega_1\,(pB) = \tilde{\omega}\,(pB)_{\mathfrak{h}_1} = 0$$

である。即ち，ω_1はP（$P/H_2, H_2$）上のスカラー形式である。

それゆえω_1はP/H_2上のform

$$\omega_1 : T\,(P/H_2) \to \mathfrak{h}_1$$

と見なされる。主バンドルP/H_2（$P/H, H_1$）の右移動はまた主バンドルP（M，G）の右移動を与えるから，

$$\omega_1 \circ R_b = (\tilde{\omega}\circ R_b)_{\mathfrak{h}_1} = (ad\,(b^{-1})\tilde{\omega})_{\mathfrak{h}_1}$$
$$= ad\,(b^{-1})\,\omega_1 \;, \qquad b \in H_1 \;,$$

となる。またP/H_2（$P/H, H_1$）の任意の鉛直ベクトルXはP（M，G）の鉛直ベクトルと見なすことができて，

$$X = pB\,, \quad p \in P\,, \quad B \in \mathfrak{h}_1\,,$$ （Ⅱ，§8，命題2），

$$\tilde{\omega}\,(pB) = B \in \mathfrak{h}_1\,,$$
$$\omega_1\,(X) = \omega_1\,(pB) = \tilde{\omega}\,(pB)_{\mathfrak{h}_1} = B = p^{-1}X$$

となる。即ち，ω_1はP/H_2（$P/H, H_1$）上の接続である。よつて命題1が成り立つ。

この証明はまた次のように考えてもよい。 自然射影

$$\varphi_0 \;:\; H \to H_1 \cong H/H_2$$

は群の準同型であるから，バンドル準同型

$$\varphi \;:\; P\,(P/H, H) \to P/H_2\,(P/H, H_1)$$

が定まる（Ⅱ，§5，定義2）。 主バンドルP（P／H，H）上の接続ωのφによる拡大（§1）がω_1である。

定理2　主バンドルP（M，G）の接続$\tilde{\omega}$の曲率形式を$\tilde{\Omega}$とすれば，分解

$$\tilde{\omega} = \omega_1 + \psi + \omega_2 \;, \quad \omega = \omega_1 + \omega_2$$

において，

$$\Omega_1 + D\psi + \Omega_2 = -\frac{1}{2}[\psi, \psi] + \tilde{\Omega}$$

が成り立つ。 ここに，

（1） Ω_1は接続ω_1の曲率形式

（2） $D\psi$はテンソル的形式ψの，接続ωに関する共変微分

（3） Ω_2は接続ω_2の曲率形式

（4） $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ は接続ωの曲率形式

である。

（証明）　接続$\tilde{\omega}$の構造方程式（§3，定理1）を分解すれば，

$$d\tilde{\omega} = -\frac{1}{2}[\tilde{\omega}, \tilde{\omega}] + \tilde{\Omega} \;,$$
$$\tilde{\omega} = \omega_1 + \psi + \omega_2 \;, \quad \omega = \omega_1 + \omega_2 \;,$$
$$d\omega_1 + \frac{1}{2}[\omega_1, \omega_1] + d\psi + [\omega, \psi] + d\omega_2 + \frac{1}{2}[\omega_2, \omega_2]$$
$$= -\frac{1}{2}[\psi, \psi] + \tilde{\Omega}\,。\quad [\omega_1, \omega_2] = 0\,。$$

定理3　次の関係式が成り立つ。

（1） $\Omega_1 = -\frac{1}{2}[\psi, \psi]_{\mathfrak{h}_1} + \tilde{\Omega}_{\mathfrak{h}_1}$　：Gaussの方程式，

（2） $D\psi = -\frac{1}{2}[\psi, \psi]_{\mathfrak{f}} + \tilde{\Omega}_{\mathfrak{f}}$　：Codazziの方程式，

（3） $\Omega_2 = -\frac{1}{2}[\psi, \psi]_{\mathfrak{h}_2} + \tilde{\Omega}_{\mathfrak{h}_2}$　：Ricci の方程式。

（証明）　Ω_1，$D\psi$，Ω_2はそれぞれ$\mathfrak{h}_1$，$\mathfrak{f}$，$\mathfrak{h}_2$を値域とするformsであるから，定理2より，これらの方程式を得る。

命題2　群H_2が離散であれば，Ricciの方程式は消えて，Gauss–Codazziの方程式は，

$$\Omega + D\psi = -\frac{1}{2}[\psi, \psi] + \tilde{\Omega}$$

で与えられる。

（証明）　$\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}$，$\mathfrak{h}_2 = 0$であるから

$$\omega_1 = \omega \;, \quad \omega_2 = 0 \;, \quad \Omega_1 = \Omega \;, \quad \Omega_2 = 0$$

となる。よつて定理2より明らかである。

命題3　特に，G／Hが対称等質空間であれば，Codazziの方程式は，

$$D\psi=\tilde{\Omega}_{\mathfrak{f}}。$$

（証明）　$[\mathfrak{f},\mathfrak{f}]\subset\mathfrak{h}$　，　$\psi:T(P)\to\mathfrak{f}$

であるから　$[\psi,\psi]_{\mathfrak{f}}=0$　　　　（証明終）

なお，主バンドルP $(P/H_2,H_2)$ のlocal section

$$s:\ U\to P\ ,\quad U\subset P/H_2\ ,$$

をとれば，form $\psi^U=\psi\circ ds$ は $P/H_2(P/H,H_1)$ 上の $(ad,\mathfrak{f})$ 型のlocalなテンソル的1－form となる。そこで

$$\omega_2^U=\omega_2\circ ds\ ,\qquad \tilde{\Omega}^U=\tilde{\Omega}\circ ds$$

とおいて，Codazziの方程式を

$$D_1\psi^U+[\omega_2{}^U,\psi^U]=-\frac{1}{2}[\psi^U,\psi^U]_{\mathfrak{f}}+\tilde{\Omega}^U_{\mathfrak{f}}$$

の形に書くことができる。ここに D_1 は接続 ω_1 に関する共変微分を表わす。この形は曲面論などでよく使われている。

§7. 普遍バンドルの正準接続

分解的等質空間P／Gに対して，§4で述べたP（P／G，G）上の正準接続は，実は誘導接続の特別な場合と考えられる。即ち，群PのMaurer−Cartan form

$$\tilde{\omega}\ :\ T(P)\to\mathfrak{p}$$

はtrivialな主バンドル $x_0\times P$ 上の接続と見なすことができる。ここに底空間はただ一点 x_0 と考えている。そして，Pの部分群Gに対して，等質空間P／Gは分解的とし，接続 $\tilde{\omega}$ の分解

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{g}+\mathfrak{m}\ ,\qquad ad(G)\mathfrak{m}=\mathfrak{m}\ ,$$
$$\tilde{\omega}=\omega+\varphi\ ,\qquad \omega=\tilde{\omega}_{\mathfrak{g}}\ ,\qquad \varphi=\tilde{\omega}_{\mathfrak{m}}\ ,$$

をとれば，P（P／G，G）上への誘導接続 ω が正準接続である。この場合，接続 $\tilde{\omega}$ の曲率形式 $\tilde{\Omega}$ は，群Pの構造方程式から

$$\tilde{\Omega}=d\tilde{\omega}+\frac{1}{2}[\tilde{\omega},\tilde{\omega}]=0$$

となる。よって，Gauss，Codazzi の方程式はそれぞれ

$$\Omega=-\frac{1}{2}[\varphi,\varphi]_{\mathfrak{g}}\ ,\quad D\varphi=-\frac{1}{2}[\varphi,\varphi]_{\mathfrak{m}}$$

で与えられ，更にP／Gが対称等質空間のときは

$$\Omega=-\frac{1}{2}[\varphi,\varphi]\ ,\qquad D\varphi=0$$

である（§4，命題2）。

さて，n 次の直交群O (n) を考えよう。即ち，

$$O(n)=\{\alpha\in GL(n)\ ;\ \alpha^t\alpha=\mathbb{1}_n\},\qquad \mathbb{1}_n\ :\ \text{単位行列。}$$

とする。そしてinjections

$$O(n-k)\to O(n)\ ,\ \alpha'\to\begin{pmatrix}\mathbb{1}_k & 0\\ 0 & \alpha'\end{pmatrix}\ ,\quad \alpha'\in O(n-k)\ ,$$

$$O(k)\times O(n-k)\to O(n)\ ,\quad (\alpha_1,\alpha_2)\to\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix}\ ,$$

$$\alpha_1\in O(k)\ ,\quad \alpha_2\in O(n-k)\ ,$$

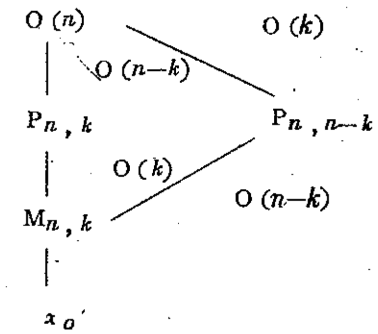
により，$O(n-k)$，$O(k)\times O(n-k)$ を $O(n)$ の部分群と見なせば

$P_{n,k}=O(n)/O(n-k)$: Stiefel 多様体，

$M_{n,k}=O(n)/O(k)\times O(n-k)$: Grassmann多様体，が得られ，

主バンドル $P_{n,k}(M_{n,k},O(k))$ が定まる（Ⅲ，§4）。

これは普遍O (k) －バンドルと呼ばれるものである。



Stiefel 多様体 $P_{n,k}$ は n 次元ユークリッド・ベクトル空間 R^n 内の直交 k －標構（たがいに直交する k 個の単位ベクトルの組）全体と見なされる。なぜなら，群O (n) は直交 k －標構全体の上に可動的に作用し，O $(n-k)$ は一つの k －標構を動かさない部分群となっているからである。同様の理由で，Grassmann 多様体 $M_{n,k}$ は R^n 内の k －平面（k 次元線形部分空間）全体と見なされる。そして，バンドルの射影 π は

$$\pi:P_{n,k}\to M_{n,k}\ ,\qquad p\to\pi p$$

$$p=(a_1,\cdots\cdots,a_k)\quad :\text{直交}k\text{－標構，}$$

πp ：ベクトル$a_1,\cdots\cdots,a_k$で張られるk－平面，

で与えられる。　群O (n) のLie代数は

$$\mathfrak{o}(n)=\{A\in\mathfrak{gl}(n),\ A+{}^tA=O\ \}$$

となる。それはO (n) の1径数部分群φ_sの直交条件

$$\varphi_s\ {}^t\varphi_s=\mathbb{1}_n,\quad \varphi_s=\exp\ sA,\quad A\in\mathfrak{o}(n),$$

に微分 $(d/ds)_{s=0}$ を施せば，歪対称の条件

$$A+{}^tA=O,\qquad A\in\mathfrak{o}(n),$$

を得るからである。

先に述べたinjectionによって，O $(n-k)$，O (k) ×O $(n-k)$ をO (n) の部分群と見るとき，これらのLie代数 $\mathfrak{o}(n-k)$，$\mathfrak{o}(k)+\mathfrak{o}(n-k)$ は $\mathfrak{o}(n)$ の部分代数となり，injections はそれぞれ

$$\mathfrak{o}(n-k)\to\mathfrak{o}(n),\quad A'\to\begin{pmatrix}O & O\\ O & A'\end{pmatrix},\quad A'\in\mathfrak{o}(n-k),$$

$$\mathfrak{o}(k)+\mathfrak{o}(n-k)\to\mathfrak{o}(n),\quad (A_1,A_2)\to\begin{pmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{pmatrix},$$

$$A_1\in\mathfrak{o}(k),\quad A_2\in\mathfrak{o}(n-k),$$

で与えられる。いま$k\times(n-k)$行列全体のつくるベクトル空間を$\mathfrak{m}$とすれば，injection

$$\mathfrak{m}\to\mathfrak{o}(n),\quad B\to\begin{pmatrix}O & B\\ -{}^tB & O\end{pmatrix},\qquad B\in\mathfrak{m},$$

によって $\mathfrak{m}$は$\mathfrak{o}(n)$ の線形部分空間となり，直和分解

$$\mathfrak{o}(n)=\mathfrak{o}(k)+\mathfrak{m}+\mathfrak{o}(n-k)$$

が定まる。そして，この分解によりGrassmann多様体$M_{n,k}$ は対称等質空間であることがわかる。

そこで，O (n) のMaurer－Cartan form $\tilde{\omega}$ の分解

$$\tilde{\omega}:T(O(n))\to\mathfrak{o}(n),$$

$$\tilde{\omega}=\omega+\psi+\omega',\quad \omega=\tilde{\omega}_{\mathfrak{o}(k)},\quad \psi=\tilde{\omega}_{\mathfrak{m}},$$

$$\omega'=\tilde{\omega}_{\mathfrak{o}(n-k)},$$

をとれば，ωは主バンドル$P_{n,k}(M_{n,k},O(k))$ 上への誘導接続となる。これが普遍O (k)－バンドルの正準接続である。そして，接続ωの曲率形式ΩはGaussの方程式

$$\Omega=-\frac{1}{2}[\psi,\psi]_{\mathfrak{o}(k)}$$

で与えられる。

また，群O (n) のMaurer－Cartan form $\tilde{\omega}$を，行列

$$\tilde{\omega}=(\omega^\lambda_\mu),\quad \omega^\lambda_\mu+\omega^\mu_\lambda=0,$$

$$\omega^\lambda_\mu:T(O(n))\to R:1-\text{form},\quad \lambda,\mu=1,\cdots\cdots,n,$$

で表わしておけば，forms ω,ψ,ω' はそれぞれ行列

$$\omega=\begin{pmatrix}\omega^\alpha_\beta & O\\ O & O\end{pmatrix},\quad \psi=\begin{pmatrix}O & \omega^\alpha_r\\ \omega^r_\alpha & O\end{pmatrix},\quad \omega'=\begin{pmatrix}O & O\\ O & \omega^r_s\end{pmatrix},$$

$$\alpha,\beta=1,\cdots\cdots,k;\quad r,s=k+1,\cdots\cdots,n,$$

で与えられる。　Lie代数 $\mathfrak{o}(n)$ における積は

$$[A,B]=AB-BA,\qquad A,B\in\mathfrak{o}(n),$$

であることに注意すれば，群O (n) の構造方程式は

$$d\omega^\lambda_\mu=-\sum_{\sigma=1}^{n}\omega^\lambda_\sigma\wedge\omega^\sigma_\mu$$

で与えられることがわかる。　これを分解して

$$\Omega^\alpha_\beta=-\sum_{r=k+1}^{n}\omega^\alpha_r\wedge\omega^r_\beta:\quad \text{Gaussの方程式},$$

$$\bar{D}\omega^\alpha_r=0\qquad :\quad \text{Codazzi の方程式},$$

$$\Omega'^r_s=-\sum_{\alpha=1}^{k}\omega^r_\alpha\wedge\omega^\alpha_s\quad :\quad \text{Ricci の方程式},$$

を得る。ここに (Ω^α_β)，(Ω'^r_s) はそれぞれ接続ω，ω' の曲率形式とし，$\bar{D}$は接続$\omega+\omega'$ による共変微分を表わす。

次に，GをコンパクトなLie 群とする。よく知られているように，十分大きな整数kに対して，GはO (k) の部分群と見なすことができる。そこで，等質空間

$$M_0=O(n)/G\times O(n-k),\qquad G\subset O(k),$$

をとれば，主バンドル$P_{n,k}(M_o, G)$が定まる。これが<u>普遍G－バンドル</u>である。Gはコンパクトだから，等質空間$O(k)/G$は必ず分解的となり，Lie 代数$\mathfrak{o}(k)$の直和分解

$$\begin{array}{l} P_{n,k} \\ \Big| \quad G \\ M_o \\ \Big| \quad O(k)/G \\ M_{n,k} \end{array}$$

$$\mathfrak{o}(k) = \mathfrak{g} + \mathfrak{f},$$
$$ad(G)\,\mathfrak{f} = \mathfrak{f},$$

がとれる。そこで，主バンドル$P_{n,k}(M_{n,k}, O(k))$の正準接続ωを分解して

$$\omega = \theta + \tau, \quad \theta = \omega_{\mathfrak{g}}, \qquad \tau = \omega_{\mathfrak{f}}$$

とすれば，θは$P_{n,k}(M_o, G)$上への誘導接続である。これを<u>普遍G－バンドルの正準接続</u>という。このとき，Gauss—Codazziの方程式は

$$\Omega = \Theta + D\tau + \frac{1}{2}[\tau, \tau]$$

となる。ここにΩ，Θはそれぞれ接続ω，θの曲率形式とし，Dは接続θによる共変微分である。

一般に，Gが連結なLie 群であるとき，任意のG－バンドルの構造群Gはその極大コンパクト部分群Hまで退化するから，普遍G－バンドルおよびその上の正準接続としては，H－バンドルについてのこれらの拡大をとればよい。

§8　<u>曲率と特性類</u>

Lie群GのLie代数$\mathfrak{g}$上の対称複一次函数Fで，随伴群$ad(G)$によって不変なもの

$$F : \underbrace{\mathfrak{g} \times \cdots\cdots \times \mathfrak{g}}_{r\text{個}} \to R, \quad F\circ ad(a) = F, \quad a \in G,$$

を$\mathfrak{g}$上のr次<u>不変多項式</u>と呼び，このようなもの全体を$I^r(G)$とすれば，これはR－加群をつくる。更に，積を

$$I^r(G) \times I^s(G) \to I^{r+s}(G), \qquad (F, F') \to FF',$$

$$(FF')(A_1, \cdots\cdots, A_{r+s})$$

$$= \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma} F(A_{\sigma(1)}, \cdots\cdots, A_{\sigma(r)})\, F'(\cdots\cdots, A_{\sigma(r+s)}),$$

$$A_1, \cdots\cdots, A_{r+s} \in \mathfrak{g}, \quad \sigma : \{1, \cdots\cdots, r+s\}\text{の順列},$$

$$I(G) = \sum_{r \geq o} I^r(G) \qquad \text{(直和)}$$

で定義すれば，$I(G)$は環となる。これをGの<u>不変多項式環</u>という。

微分多様体Mの実係数コホモロジー環を

$$H^*(M, R) = \sum_{r \geq o} H^r(M, R)$$

とする。いま，M上の主バンドル$P(M, G)$の接続

$$\omega : T(P) \to \mathfrak{g}$$

をとり，その曲率形式をΩとする。そして群Gのr次不変多項式　$F \in I^r(G)$にform Ωを代入して，2r－form

$$F(\Omega) = F(\Omega, \cdots\cdots, \Omega) : T^{2r}(P) \to R$$

をつくれば，Ωは$(ad, \mathfrak{g})$型テンソル的2－formであるから

$$F(\Omega)\circ R_a = F(\Omega \circ R_a) = F(ad(a^{-1})\,\Omega)$$

$$= F(\Omega), \qquad a \in G,$$

$$F(\Omega)\,h = F(\Omega h) = F(\Omega)$$

となる。即ち，$F(\Omega)$は$P(M, G)$のスカラー形式となり，これはM上の2r－form

$$F(\Omega) : T^{2r}(M) \to R$$

と見なすことができる。また，Bianchiの恒等式より，

$$D\Omega = 0 \quad (§3，定理3),$$
$$dF(\Omega) = DF(\Omega) = rF(D\Omega, \Omega, \cdots\cdots, \Omega) = 0$$

となる（§3，定理2，系2）。　即ち，form $F(\Omega)$は外微分dによるコサイクルとなり，de Rham の定理の意味でMのコホモロジー類

$$F(\Omega) \in H^{2r}(M, R)$$

を表わすと考えられる。そこで，次の定義をする。

定義　環の準同型

$$\chi : I(G) \to H^{*}(M, R), \quad F \to F(\Omega),$$

を主バンドルP（M，G）の特性準同型という。

定理1　特性準同型χはP（M，G）上の接続のとり方に無関係である。

（証明）　P（M，G）上に二つの接続ω_0，ω_1をとり，これらの曲率形式をそれぞれΩ_0，Ω_1とする。いま，P（M，G）上のforms

$$\varphi, \quad \omega_t : T(P) \to \mathfrak{g},$$

$$\varphi = \omega_1 - \omega_0,$$

$$\omega_t = \omega_0 + t\varphi, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad t：パラメータ,$$

をとれば，φは（ad，$\mathfrak{g}$）型テンソル的1－formで，ω_tは接続となる。そして，$t=0$，1のとき，ω_tはそれぞれ始めに与えられた接続ω_0，ω_1と一致する。接続ω_tの曲率形式をΩ_tとし，接続ω_tに関する共変微分をD_tとすれば，明らかに

$$\Omega_t = \Omega + tD\varphi + \frac{t^2}{2}[\varphi, \varphi]$$

$$D_t\varphi = D\varphi + t[\varphi, \varphi] = \frac{d}{dt}\Omega_t$$

$$D_t\Omega_t = 0 \qquad (\text{Bianchi の恒等式})$$

が成り立つ。群Gのr次不変多項式$F \in I^{r}(G)$に対して，form

$$F(\varphi, \Omega_t, \cdots\cdots, \Omega_t) : T^{2r-1}(P) \to R$$

はP（M，G）のスカラー形式であるから，

$$dF(\varphi, \Omega_t, \cdots\cdots, \Omega_t) = D_tF(\varphi, \Omega_t, \cdots\cdots, \Omega_t)$$

$$= F(D_t\varphi, \Omega_t, \cdots\cdots, \Omega_t) + (r-1)F(\varphi, D_t\Omega_t, \Omega_t, \cdots\cdots, \Omega_t)$$

$$= F(\frac{d}{dt}\Omega_t, \Omega_t, \cdots\cdots, \Omega_t) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}F(\Omega_t)$$

となる。そこで

$$\Phi = r\int_0^1 F(\varphi_t, \Omega_t, \cdots\cdots, \Omega_t)\,dt$$

とおけば，ΦはP（M，G）のスカラー形式であるから，M上のform

$$\Phi : T^{2r-1}(M) \to R$$

と見なすことができて，

$$d\Phi = r\int_0^1\{\frac{1}{r}\frac{d}{dt}F(\Omega_t)\}dt = F(\Omega_1) - F(\Omega_0)$$

となる。即ち，F（Ω_1）$\simeq$F（Ω_0）（cohomologous）である。（証明終）

特に，普遍バンドルの特性準同型についてしらべよう。

定理2　コンパクトなLie群Gに対して，

$$P_{n,k} = O(n)/O(n-k),$$

$$M_o = O(n)/G \times O(n-k), \quad G \subset O(k),$$

とおいて，普遍G－バンドル$P_{n,k}$（M_o，G）をとる。この主バンドルの特性準同型

$$\chi_o : I(G) \to H^{*}(M_o, R)$$

は，次数＜（$n-k$）／2，次元＜$n-k$，において，bijection（1対1）である。

（証明）　§7で述べたように，群O（n）の Maurer－Cartan form $\widetilde{\omega}$ の分解を

$$\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{o}(k) + \mathfrak{m} + \mathfrak{o}(n-k), \quad \mathfrak{o}(k) = \mathfrak{g} + \mathfrak{f},$$

$$\widetilde{\omega} = \omega + \psi + \omega', \qquad \omega = \theta + \tau,$$

とすれば，ω，θはそれぞれ主バンドル$P_{n,k}$（$M_{n,k}$，O（k）），$P_{n,k}$（M_o，G）の正準接続である。接続ω，θの曲率形式をそれぞれΩ，Ⓗとし，接続θによる共変微分をDとして，

$$D\tau = T$$

とおく。等質空間M_oは分解的で

$$\widetilde{\omega} = \theta + \omega' + \psi + \tau$$

であるから，M_o上の任意のr次不変形式Φは，ψ，τの多項式

$$\Phi = Q(\psi + \tau)$$

として与えられる（§5，命題）。いま，$r < n-k$とすれば，多項式Qがad（O（$n-k$））で不変であることから，ψは

$$\Omega=-\frac{1}{2}[\psi,\psi]_{\sigma(k)}$$

の形でΦの中に含まれている。よつて Gauss-Codazzi の方程式

$$\Omega=\text{Ⓗ}+T+\frac{1}{2}[\tau,\tau],\quad D\tau=T,$$

より，Φはτ，T，Ⓗの多項式である。そこで，τ，T，Ⓗから生成される多項式環をKとすれば，Ricci，Bianchi の恒等式

$$D\tau=T,\quad DT=[\text{Ⓗ},\tau],\quad D\text{Ⓗ}=0,$$

より，DはK上の反微分である。K上にもう一つの反微分δを

$$\delta\tau=0,\quad \delta T=\tau,\quad \delta\text{Ⓗ}=0,$$

で定義して，$\triangle=D\delta+\delta D$とおけば，$\triangle$はK上の微分となり，

$$\triangle\tau=\tau,\quad \triangle T=T,\quad \triangle\text{Ⓗ}=0,$$

である。そして，form $\Psi\in K$が$P_{n,k}$（Mo，G）のスカラー形式，即ちMo上の form であるならば，$D\Psi$，$\delta\Psi$，$\triangle\Psi$もまたスカラー形式となり，したがつて

$$D\Psi=d\Psi,\quad \triangle\Psi=(d\delta+\delta d)\Psi$$

となる。また，§5で述べたように，任意のコホモロジー類

$$\alpha^r\in H^r(Mo,R),\quad r<n-k,$$

は，等質空間Mo 上の不変r-form $\Phi\in K$，$d\Phi=0$，によつて代表される。そして，

$$\triangle\Phi=(d\delta+\delta d)\Phi=d\delta\Phi\simeq 0\qquad \text{(coboundary)},$$

$$\Phi\simeq\Phi-c\triangle\Phi\qquad \text{(cohomologous)},$$ $c\in R$，が成り立つ。それゆえ，定数cを適当にえらんで，$\Phi-c\triangle\Phi$に含まれるτ，Tの次数をΦにおけるそれよりも低くすることができる。この操作をくり返せば，結局，

$$\Phi\simeq F(\text{Ⓗ}),\quad F\in I(G),$$

となる。即ち，特性準同型

$$\chi_0: I(G)\to H^*(Mo,R)$$

は次数<$(n-k)/2$，次元<$n-k$に制限すれば surjection である。また，どんな不変スカラー形式$\Psi\in K$に対しても

$$d\Psi=D\Psi=F(\text{Ⓗ}),\quad F\in I(G),\quad F\neq 0,$$

となることはできないから，F(Ⓗ)$\simeq$0ならば，F=0である。よつてχ_0は次数$(n-k)/2$，次元<$n-k$において injection である。（証明終）

GをコンパクトLie 群とし，$P_{n,k}(M_0,G)$を普遍G－バンドルとする。微分多様体Mにおいて，dim M<$n-k$ とすれば，M上の任意のG－バンドルP（M，G）は適当な写像fによる誘導バンドル

$$P\cong f^*P_{n,k}\qquad f: M\to M_0,$$

として与えられることが知られている。また，この写像fによりコホモロジー環の準同型

$$f^*: H^*(M_0,R)\to H^*(M,R)$$

が引き起され，これは写像fのとり方に関係なく，P（M，G）のバンドル構造によつて定まるものである。部分環

$$\mathrm{Im}f^*\subset H^*(M,R)$$

の元をこのバンドル構造の実係数特性類という。一方，定理1によれば，特性準同型

$$\chi: I(G)\to H^*(M,R)$$

はP（M，G）の接続のとり方には関係なく，P（M，G）のバンドル構造によつて定まるものである。そして，実は

$$\mathrm{Im}\chi=\mathrm{Im}f^*$$

が成り立つ。その理由は，普遍バンドル$P_{n,k}(M_0,G)$上には正準接続θをとり，またP（M，G）上には写像fによるθの逆像（§1）をとつておけば，コホモロジー環の準同型f^*は

$$f^*=\chi\circ\chi_0^{-1}$$

で与えられることが容易に示されるからである。

§9　Riemann多様体の部分多様体

誘導接続について，最も popular な例を示そう。

M^nをn次元 Riemann 多様体とし，その Riemann 計量をgとする。即ち，gは微分写像

$$g: T^2(M^n)\to R,\quad (X,Y)\to g(X,Y),$$

（i）$g(X,Y)$：双一次，$X,Y\in T_x(M^n)$，$x\in M^n$，

（ii）$g(X,Y)=g(Y,X)$：対称，

(iii) $X\neq 0$ならば，$g(X,X)>0$

である。M^nの接標構バンドル$\tilde{P}(M^n, GL(n))$において，gに関する直交標構全体

$$P=\{(e_\lambda)\in\tilde{P};\ g(e_\lambda, e_\mu)=\delta_{\lambda\mu}\}$$

は主バンドル$P(M^n, O(n))$をつくり，injection

$$\varphi: P\to\tilde{P},\quad (e_\lambda)\to(e_\lambda),$$

は群の injection

$$\varphi_0: O(n)\to GL(n),\quad a\to a,$$

から定まるバンドル準同型である（III，§5，定義2）。逆に，$\tilde{P}$の構造群$GL(n)$はその極大コンパクト部分群$O(n)$まで退化するから，その制限$\varphi: P\to\tilde{P}$を一つ指定すれば，これは injection となり，Pに属する標構を直交標構と呼ぶことによつて，接ベクトル空間$T_x(M^n)$，$x\in M^n$，上の内積，即ちM^nの Riemann 計量gが定まる。そこで

$$H=O(k)\times O(n-k)\subset O(n)$$

とおいて，Stiefel 多様体および Grassmann多様体

$$F_1=O(n)/O(n-k),$$
$$F_2=O(n)/O(k),$$
$$F\ =O(n)/H$$

を標準ファイバーとする$P(M^n, O(n))$の同伴バンドル

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[d, "O(n-k)"] \arrow[dr, "O(k)"] & \\
P/O(n-k) \arrow[d, "O(k)"] & P/O(k) \arrow[dl, "O(n-k)"] \\
P/H \arrow[d, "F"] & \\
M^n &
\end{tikzcd}$$

$P/O(n-k)(M^n, F_1, O(n))$：直交k－標構バンドル，

$P/O(k)(M^n, F_2, O(n))$：直交$(n-k)$－標構バンドル，

$P/H(M^n, F, O(n))$：接k－平面バンドル，

をとる。よく知られているように，M^nの Riemann 計量gから Christoffel の記号をつくれば，M^nの Riemann 接続

$$\omega: T(P)\to\mathfrak{o}(n)$$

が定まる。Lie 代数$\mathfrak{o}(n)$の分解（§7）による接続ωの分解

$$\mathfrak{o}(n)=\mathfrak{o}(k)+\mathfrak{f}+\mathfrak{o}(n-k),\quad \mathfrak{h}=\mathfrak{o}(k)+\mathfrak{o}(n-k),$$
$$\mathrm{ad}(H)\mathfrak{f}=\mathfrak{f},\quad [\mathfrak{f},\mathfrak{f}]\subset\mathfrak{h},$$
$$\omega=\omega_1+\psi+\omega_2,$$
$$\omega_1=\omega_{\mathfrak{o}(k)},\quad \psi=\omega_{\mathfrak{f}},\quad \omega_2=\omega_{\mathfrak{o}(n-k)},$$

をとれば，ω_1, ω_2 はそれぞれ$P/O(n-k)(P/H, O(k))$，$P/O(k)(P/H, O(n-k))$上への誘導接続で，ψは$P(P/H, H)$上の$(\mathrm{ad}, \mathfrak{f})$型テンソル的1－form である。

さて，M^kをM^n内のk次元部分多様体とすれば，injection

$$\iota: M^k\to M^n,\quad x\to x,$$

によつて，M^kの Riemann 計量

$$g^*=g\circ\iota$$

$$\begin{tikzcd}
T^2(M^k) \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "g^*"'] & T^2(M^n) \arrow[d, "g"] \\
& R
\end{tikzcd}$$

が引き起される。一方，点$x\in M^k$におけるM^kの接ベクトル空間$T_x(M^k)$をとれば，写像

$$f: M^k\to P/H,\quad x\to T_x(M^k)\in P/H,$$

が定まる。そして主バンドル

$$P/O(n-k)(P/H, O(k)),$$
$$P/O(k)(P/H, O(n-k)),$$
$$P(P/H, H),$$

からの写像fによる誘導バンドルをそれぞれ

$$P_1^*(M^k, O(k)),$$
$$P_2^*(M^k, O(n-k)),$$
$$P^*(M^k, H),$$

$$\begin{tikzcd}
P^* \arrow[r] \arrow[d, "O(n-k)"] & P \arrow[d, "O(n-k)"] \\
P_1^* \arrow[r] \arrow[d, "O(k)"] & P/O(n-k) \arrow[d, "O(k)"] \\
M^k \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\iota"'] & P/H \arrow[d] \\
& M^n
\end{tikzcd}$$

とすれば，P_1^*，P_2^*はそれぞれM^k上の直交接標構バンドル，直交法標構バンドルあつて，$P=P_1^*\oplus P_2^*$ である。

いま，forms ω，ω_1，ψ，ω_2 の写像fによる逆像をそれぞれω^*，ω_1^*，ψ^*，ω_2^*とすれば，$P^*(M^k, H)$ の接続ω^*は

$$\omega^*=\omega_1^*+\psi^*+\omega_2^*$$

と分解される。そしてP_1^*上への誘導接続ω_1^*は計量g^*によつて定まるM^kの Riemann 接続と一致する。またP^*上のテンソル的形式ψ^*およびP_2^*上への誘導接続ω_2^*は，P_1^*上の主バンドル$P^*(P_1^*, O(n-k))$の local section をとることによつてP_1^*

上の form と見るとき，それぞれM^kの第2および第3基本量を与えるものである。

M^nの Riemann 接続ωを

$$d\,e_\lambda=\sum_\mu \omega_\lambda^\mu\, e_\mu,\quad \omega_\lambda^\mu+\omega_\mu^\lambda=0,\qquad \lambda,\mu=1,\cdots\cdots,n,$$

の形で表わして（§2），特に標構(e_λ)としては$(e_\lambda)\in P^*$であるものだけに制限すれば

$$(e_1,\cdots\cdots,e_k)\in P_1^*,\qquad (e_{k+1},\cdots\cdots,e_n)\in P_2^*$$

となり，誘導接続ω_1^*，ω_2^*はそれぞれ

$$d_1 e_\alpha=\sum_\beta \omega_\alpha^\beta e_\beta,\qquad d_2 e_r=\sum_s \omega_r^s e_s$$

$$\alpha,\beta=1,\cdots\cdots,k;\quad r,s=k+1,\cdots\cdots,n,$$

で与えられる。更に$P_2^*(M^k,O(n-k))$の local section

$$\nu_0: M^k\supset U\to P_2^*,\qquad x\to(n_r)\in P_2^*,$$

をとれば，$P^*(P_1^*,O(n-k))$の local section

$$\nu: P_1^*\ \tilde{U}\to P^*,\qquad (e_\alpha)\to(e_\alpha,n_r)\in P^*,$$

が定まる。そして，(ω_μ^λ)を local なP_1^*上の form

$$\omega_\mu^\lambda\circ d\nu=\omega_\mu^\lambda$$

と見なせば，主バンドル$P_1^*(M,O(n))$において，

$$\omega_1^*=(\omega_\beta^\alpha):P_1^*(M,O(n))\text{ 上への誘導接続},$$

$$\psi=(\omega_r^\alpha):(\mathrm{ad}\ ,\mathfrak{f})\text{ 型テンソル的1-form},$$

$$\omega_2^*=(\omega_s^r):\text{スカラー型式},$$

となる。このとき，接続の構造方程式を分解すれば，部分空間論においてよく知られた Gauss, Codazzi, Ricci の方程式

$$d\omega_\mu^\lambda=-\sum_\sigma \omega_\sigma^\lambda\wedge\omega_\mu^\sigma+\Omega_\mu^\lambda,\qquad \text{（構造方程式）},$$

$$\Omega^*{}_\beta^\alpha=-\sum_s \omega_s^\alpha\wedge\omega_\beta^s+\Omega_\beta^\alpha,$$

$$D^*\omega_r^\alpha=-\sum_s \omega_s^\alpha\wedge\omega_r^s+\Omega_r^\alpha,$$

$$d\omega_s^r=-\sum_\alpha \omega_\alpha^r\wedge\omega_s^\alpha-\sum_t \omega_t^r\wedge\omega_s^t+\Omega_s^r,$$

$$\alpha,\beta=1,\cdots\cdots,k;\quad r,s,t=k+1,\cdots\cdots,n,$$

を得る。ここに，Ω^*は誘導接続ω_1^*の曲率形式，D^*は接続ω_1^*による共変微分を表わす。

§10 展 開

ファイバー・バンドルB（M，F，G）の同伴主バンドルをP（M，G）とし，主写像

$$\chi: P\times F\to B,\qquad (p,y)\to py,$$

の誘導写像も同じく

$$\chi: T(P)\times T(F)\to T(B),$$

$$(X,Y)\to Xy+pY,\quad X\in T_p(P),\ Y\in T_y(F),$$

で表わす。また，V（P），V（B）をそれぞれP，Bの鉛直ベクトル・バンドルとする。いまP（M，G）上の接続

$$\omega: T(P)\to \mathfrak{g}$$

が与えられたとし，H（P）をその水平ベクトル・バンドルとすれば

$$T(P)=V(P)\oplus H(P)\qquad \text{（直和）}$$

となる。点$p\in P$，$y\in F$に対して，写像

$$\chi: T_p(P)\times T_y(F)\to T_{py}(B),\quad (X,Y)\to Xy+pY,$$

は surjection である。これを二つの写像

$$p\ : T_y(F)\to T_{py}(B),\quad Y\to pY,\quad Y\in T_y(F),$$

$$\chi_y: T_p(P)\to T_{py}(B),\quad X\to Xy,\quad X\in T_p(P),$$

に分けて考えるとき，pは bijection

$p: T_y(F) \cong V_{py}(B)$,　$Y \to pY$

である（Ⅲ，§8，命題1）。そしてχ_yは特に鉛直ベクトルに対して

$\chi_y: V_p(P) \to V_{py}(B)$,　$pA \to pAy$,　$A \in \mathfrak{g}$,

である。したがって，水平ベクトルに対する写像

$\chi_y: H_p(P) \to T_{py}(B)$,　$X \to Xy$,　$X \in H_p(P)$,

は injection である。しかも，元$a \in G$に対して

$\chi_y \circ R_a = \chi_{ay}$,　$R_a H_p(P) = H_{pa}(P)$,

$\chi_{ay} H_p(P) = \chi_y H_{pa}(P)$

が成り立つ。そこで，点$z \in B$に対して

$H_z(B) = \chi_y H_p(P)$,　$z = py$,　$p \in P$,　$y \in F$,

$$H(B) = \bigcup_{z \in B} H_z(B),$$

とおけば，$H_z(B)$ は $z = py$なる点p，yのとり方に関係なく定まる。$H_z(B)$ を点$z \in B$におけるBの水平ベクトル空間といい，H（B）をBの水平ベクトル・バンドルという。

明らかに

$T(B) = V(B) \oplus H(B)$　（直和）

となる。この直和分解による射影をそれぞれ

$v: T(B) \to V(B)$,　$h: T(B) \to H(B)$

で表わす。いま微分多様体M'からBへの微分写像fが与えられたとし，その誘導写像を

$df: T(M') \to T(B)$,　$f: M' \to B$,

とする。このとき，写像

$\tilde{D}f = v \circ df: T(M') \to V(B)$

を接続ωに関する写像fの内部的微分という。写像fを

$f: M' \to B$,　$x' \to f(x')$,

$f(x') = \varphi(x')\,\eta(x')$,　$\varphi: M' \to P$,　$\eta: M' \to F$,

の形で表わすとき，内部的微分$\bar{D}f$は

$\bar{D}f(X') = \varphi(x')\,(\omega \circ d\varphi(X') + d\eta(X'))$,

$X' \in T_{x'}(M')$,　$x' \in M'$,

で与えられる。

さて，バンドルB（M，F，G，π）の底空間M上の曲線

$x = x(t)$,　$0 \le t \le 1$,　$x \in M$,

に対して，点$z_0 \in F_{x(0)}$をとれば，B上の曲線

$\tilde{z} = \tilde{z}(t)$,　$0 \le t \le 1$,　$\tilde{z} \in B$,

$\tilde{z}(0) = z_0$,　$\pi\tilde{z}(t) = x(t)$,　$\dfrac{d\tilde{z}}{dt} \in H_{x(t)}(B)$,

が定まる。即ち，$\tilde{z} = \tilde{z}(t)$は distribution H（B）の積分曲線である。この曲線$\tilde{z}(t)$をM上の曲線$x(t)$の lift という。

したがって，M上の曲線

$x = x(t)$,　$0 \le t \le 1$,

が与えられれば，この曲線上のファイバーに対して，bijections

$\xi_t: F_{x(0)} \to F_{x(t)}$,　$z_0 \to \tilde{z}(t)$,　$t \in [0, 1]$,

が定まる。また，B上の任意の曲線

$z = z(t)$,　$0 \le t \le 1$,　$z \in B$,

に対して，これをM上に射影した曲線

$x = x(t) = \pi z(t)$,　$0 \le t \le 1$,

から定まる bijections ξ_tを用いて，ファイバー$F_{x(0)}$上の曲線

$z^* = z^*(t) = \xi_t^{-1} z(t)$,　$0 \le t \le 1$,

を得る。これを，B上の曲線z（t）のファイバ $F_{x(0)}$ 上への展開（development）という。

特に，主バンドルP（M，G，π）において，M上の曲線

$x = x(t)$,　$0 \le t \le 1$,　$x \in M$,

の lift を考える。点$p_0 \in G_{x(0)}$に対して，P上の曲線

$p = p(t)$,　$0 \le t \le 1$,　$p \in P$,

$P(0) = p_0$,　$\pi p(t) = x(t)$,

を任意にとるとき，M上の曲線$x(t)$の lift は

$\tilde{p} = \tilde{p}(t) = p(t)\,a(t)$,　$0 \le t \le 1$,

$a = a(t)$：G上の曲線，　$a(0) = e$,

の形で与えられる。そして，lift の接ベクトル $\frac{d\tilde{p}}{dt}$ が水平である条件は

$$\omega\left(\frac{d\tilde{p}}{dt}\right)=\omega\left(\frac{dp}{dt}a+p\frac{da}{dt}\right)=0$$

であるから，接続形式ωの性質（§1，命題4）により

$$\mathrm{ad}\,(a^{-1})\,\omega\left(\frac{dp}{dt}\right)+a^{-1}\frac{da}{dt}=0$$

が成り立つ。よつて，群G上の曲線 $a(t)$ は微分方程式

$$\frac{da}{dt}a^{-1}+\omega\left(\frac{dp}{dt}\right)=0$$

の，初期条件 $a(o)=e$ による解として与えられる。この曲線 $a(t)$ を用いて，曲線 $x(t)$ の lift は，一般に

$$\tilde{p}=p(t)\,a(t)\,a_o,\quad \tilde{p}(o)=p_o a_o,\quad a_o\in G,$$

で与えられる。更に，同伴バンドル $B(M,F,G,\pi)$ において，M上の曲線 $x(t)$ の lift は

$$\tilde{z}(t)=\tilde{p}(t)\,y_o,\quad \tilde{z}(o)=\tilde{p}(o)\,y_o,\quad y_o\in F,$$

で与えられ，また，曲線 $x(t)$ 上のファイバーの bijections ξ_t は

$$\xi_t=\tilde{p}(t)\,\tilde{p}(o)^{-1}:\ F_{x(o)}\to F_{x(t)},\ t\in[o,1],$$

で与えられる。

§11 接　　着

$\tilde{P}(M,\tilde{G})$ を主バンドル，Gを群 $\tilde{G}$ の閉部分群とし，等質空間 $F=\tilde{G}/G$ をファイバーとする $\tilde{P}$ の同伴バンドルを

$$B(M,F,\tilde{G}),\qquad B=\tilde{P}/G,$$

とする。そして条件

(a) Section $\sigma:M\to B$ が存在する。

(b) $\dim M=\dim F$

がみたされていると仮定する。条件（a）より，$\tilde{P}$ の構造群 $\tilde{G}$ は部分群Gまで退化する。即ち，

$$P=\{p\in\tilde{P};\ p\bar{e}=\sigma(x),\ x\in M\},\quad \bar{e}=G\in F,$$

とおけば，$P(M,G)$ は主バンドルとなり，これは injection

$$\tilde{\sigma}:P\to\tilde{P},\quad p\to p,$$

による $\tilde{P}(M,\tilde{G})$ の制限である。また，$P(M,G)$ は写像

$$\sigma:M\to B$$

による $\tilde{P}(M,\tilde{G})$ からの誘導バンドルと見ることもできる。このとき，写像σを cover するバンドル写像が injection $\tilde{\sigma}$ である。

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & P \arrow[r, "\tilde{\sigma}"] \arrow[d, no head] & \tilde{P} \arrow[d, no head] \\
 & M \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, equal] & \tilde{P}/G=B \arrow[d, no head, "\tilde{G}/G=F"] \\
 & & M
\end{tikzcd}$$

いま，点 $x\in M$ に対して，点 $\sigma(x)\in B$ におけるBの鉛直ベクトル空間を V_x とすれば，

$$V_x=V_{\sigma(x)}(B)=T_{\sigma(x)}(F_x),\quad V(M)=\bigcup_{x\in M}V_x,$$

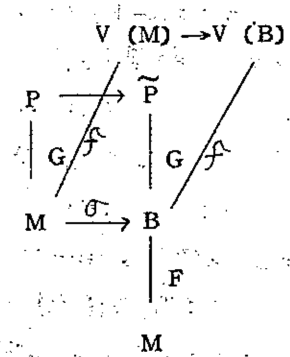
となり，ベクトル・バンドル $V(M)$ は群Gの等方性表現

$$is:G\to GL(\mathfrak{f}),\quad \mathfrak{f}=T_{\bar{e}}(F),$$

によつて定まる $P(M,G)$ の同伴バンドル

$$V(M)\cong P\times_{is(G)}\mathfrak{f}$$

として与えられる。なぜなら，Bの鉛直ベクトル・バンドル $V(B)$ は



$$V(B)\cong\tilde{P}\times_{is(G)}\mathfrak{f}$$

で与えられ（II，§8，定理2），ベクトル・バンドル $V(M)$ は，写像 $\sigma:M\to B$ による $V(B)$ からの誘導バンドルとなるからである。

<u>定義</u>　上の条件のもとで，ベクトル・バンドルの bijection

$$\theta:T(M)\to V(M)=P\times_{is(G)}\mathfrak{f}$$

が指定されたとき，バンドル $B(M,F,\tilde{G})$ はMに<u>接着</u>（soudure）されたという。

接着は一般には存在しない。これが存在するためには，少くとも接ベクトル・バンドル$T(M)$の構造群$GL(\mathfrak{f})$がその部分群$is(G)$まで退化することが必要である。

命題　接着とは，主バンドル$P(M, G)$上に，次の条件をみたす1−form $\theta: T(P)\to\mathfrak{f}$ が指定されることである。

(i) θは$(is, \mathfrak{f})$型テンソル的1−form である。

(ii) $X\in T(P)$に対して，$\theta(X)=0$ならば，Xは鉛直である。

(証明)　条件(i)はII，§10，命題3から明らかである。

また，条件(ii)は

$$\theta: T(M)\to V(M)$$

が injection であることを示している。更に，条件

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & T(P) & \xrightarrow{\theta} & P\times\mathfrak{f} & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\chi} & & \\ & & T(M) & \xrightarrow{\theta} & V(M) & \to & 0 \end{array}$$

(b) $\dim M=\dim F$

より，θは bijection である。(証明終)

このテンソル的形式θを接着の基底形式(basic form)という。

接着が与えられたとき，section σによつて，点$x\in M$と点$\sigma(x)\in B$とを同一視し，更に bijection θ によつて接ベクトル空間$T_x(M)$と$T_{\sigma(x)}(F_x)$とを同一視すれば，バンドルBのファイバーF_xは点$x\in M$において多様体Mに接していると考えられる。この意味で，ファイバーF_xを点$x\in M$におけるMの接等質空間と呼ぶことがある。

最も基本的な例として，微分多様体Mの接ベクトル・バンドル$T(M)$の恒等自己同型

$$\theta=1: T(M)\to T(M),\quad X\to X,$$

は接着と考えられる。即ち，ゼロ・ベクトル$0_x\in T_x(M)$をとれば，写像

$$\sigma: M\to T(M),\quad x\to 0_x,$$

はバンドル$T(M)$の section である。また，ベクトル空間$T_x(M)$をアフィン空間F_xと見なせば，$T_{\sigma(x)}(F_x)$は$T_x(M)$自身と同一視される。そしてbijection

$$\theta: T_x(M)\to T_{\sigma(x)}(F_x)=T_x(M),\quad X\to X,$$

が接着を与えている。この場合，F_x内のアフィン標構全体を$\widetilde{G}_x$として，アフィン標構バンドル$\widetilde{P}$をとれば

$$T(M)=\widetilde{P}/GL(n),\quad \widetilde{P}=\bigcup_{x\in M}\widetilde{G}_x,$$

で与えられる。なお，この接着$\theta=1$は通常dxなる記号で書かれているものである。即ち，

Mの接標構バンドルPをとり，基底形式を用いてこの接着を表わせば

$$\theta: T(P)\to\mathfrak{f}=T_0(R^n)=R^n,\quad \theta=(\theta^\lambda),$$

$$dx=\sum_\lambda\theta^\lambda\mathfrak{e}_\lambda,\quad (\mathfrak{e}_\lambda)\in P,\quad x\in M,$$

の形で与えられる。Mの局所座標(x^λ)をとれば，標構$(\mathfrak{e}_\lambda)$は

$$(\mathfrak{e}_\lambda)=\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)(a^\mu_\lambda),\quad (a^\mu_\lambda)\in GL(n),\quad \text{即ち}$$

$$\mathfrak{e}_\lambda=\sum_\mu a^\mu_\lambda\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

で表わされる。このとき，接着の基底形式(θ^λ)およびdxは

$$(\theta^\lambda)=(a^\lambda_\mu)^{-1}(dx^\lambda),$$

$$dx=\sum_\lambda\theta^\lambda\mathfrak{e}_\lambda=\sum_\lambda dx^\lambda\frac{\partial}{\partial x^\lambda}$$

で与えられる。

もう一つ簡単な例を示そう。PをLie 群，GをPの閉部分群とし，主バンドル$P(P/G, G, \pi)$をとれば，

$$\theta: T(P/G)\cong P\times_{is(G)}\mathfrak{f}=V(P/G),\quad \mathfrak{f}=T_e(P/G)$$

である(II，§7，定理2)。この bijection θ は接着と考えられる。いま，群の injection

$$\varphi_0: G\to P,\quad a\to a,$$

によつて定まる主バンドル$P(P/G, G)$の拡大

$$\widetilde{P}(P/G, P),\quad \varphi: P\to\widetilde{P},$$

をとれば，これは同伴バンドル

$$\widetilde{P}=P\times_G P,\quad (p, q)\sim(pa, a^{-1}q),\quad a\in G,$$

として与えられるものである。ところが，$\widetilde{P}$は実は積バンドルとなる。なぜなら，上の同値関

係により，主バンドル$\tilde{P}(P/G, P)$の section

$$s: P/G \to \tilde{P}, \quad x \to (p, p^{-1}), \quad \pi(p)=x\in P/G,$$

が点$p\in G_x$のえらび方に関わりなく定義されるからである。即ち

$$\tilde{P}\cong P/G\times P, \quad (p, q)\to(\pi(p), pq), \quad p, q\in P,$$

となる。そこで更にP/Gをファイバーとする$\tilde{P}$の同伴バンドルBをとれば，これも積バンドルであつて，その主写像は

$$\chi: \tilde{P}\times P/G \to B, \quad (\tilde{p}, y)\to(x, py)$$

$$\tilde{p}=(x, p)\in P/G\times P, \quad y\in P/G,$$

$$B=P/G\times P/G,$$

で与えられる。そして，section

$$\sigma: P/G\to B, \quad x\to(x, x), \quad x\in P/G,$$

によって$\tilde{P}(P/G, P)$の構造群PをGまで退化させるとき，$\tilde{P}(P/G, P)$の制限として得られるものがもとの主バンドル$P(P/G, G, \pi)$である。これはまた，写像σによる$\tilde{P}(B, G)$からの誘導バンドルと見なしてもよい。なお，$P(P/G, G)$は一般には積バンドルではない。勿論，別のsection

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr] \arrow[dddd, dash] & & \tilde{P}\cong P/G\times P \arrow[dddd, dash] \\
p \arrow[r] \arrow[d] & (p, e)\cong(x, p) \arrow[d] & \\
x \arrow[r] & (x, x) & \\
& & \\
M \arrow[rr] & & B \arrow[d, dash] \\
& & M
\end{tikzcd}$$

$$\sigma_0: P/G\to B, \quad x\to(x, \bar{e}), \quad x\in P/G,$$

によって$\tilde{P}(P/G, P)$の構造群PをGまで退化させれば積バンドル　$P_0=P/G\times G$を得るが，これはいま考えていない。

結局，bijection

$$\theta: T(P/G)\to V(P/G)$$

によって，積バンドル$B=P/G\times P/G$の接着が与えられる。

群Pの Maurer–Cartan form を

$$\omega: T(P)\to \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{p}=T_e(P),$$

とすれば，この接着の基底形式は

$$\theta=\pi\circ\omega: T(P)\to\mathfrak{f}, \quad \mathfrak{f}=T_{\bar{e}}(P/G)=\mathfrak{p}/\mathfrak{g}$$

で与えられる。

一般に，バンドル$B(M, F, \tilde{G})$の接着が与えられると，主バンドル$P(M, G, \pi)$上の任意のテンソル的形式はP上のテンソルを用いて表わすことができる。これを説明しよう。

接着の基底形式

$$\theta: T(P)\to P\times\mathfrak{f}, \quad X\to(p, \theta(X)), \quad X\in T_p(P),$$

は$(is, \mathfrak{f})$型テンソル的1−form で，しかも surjection である。

ベクトル空間$\mathfrak{f}$上の外k−ベクトル空間$\mathfrak{f}^{(k)}$上に拡げられた等方性表現もやはりisで表わすことにして，

$$is: G\to GL(\mathfrak{f}^{(k)}), \quad is=is^{(k)}=is\wedge\cdots\cdots\wedge is,$$

$$\theta^{(k)}=\theta\wedge\cdots\cdots\cdots\wedge\theta \quad (k\text{個})$$

とおけば(Ⅰ，§4，定義2)，$\theta^{(k)}$はP上の$(is, \mathfrak{f}^{(k)})$型テンソル的k−form

$$\theta^{(k)}: T^{(k)}(P)\to P\times\mathfrak{f}^{(k)}$$

となり，これも surjection である。したがつて，これはベクトル・バンドルの bijection

$$\theta^{(k)}: T^{(k)}(M)\to V^{(k)}(M)=P\times_{is(G)}\mathfrak{f}^{(k)}$$

と見なすことができる(Ⅱ，§10，命題3)。

いま，ΦをP上の任意の(ρ, W)型テンソル的k−form とし，これをベクトル・バンドルの準同型

$$\Phi: T^{(k)}(M)\to E(M)\cong P\times_{\rho(G)}W$$

の形で表わすとき，$\theta^{(k)}$は bijection であるから，

$$\Phi=\tau\circ\theta^{(k)}$$

なる準同型

$$\tau: V^{(k)}(M)\to E$$

が定まり，Φとτとは1対1に対応する。準同型τはまた，ベクトル・バンドルの section

$$\begin{tikzcd}
T^{(k)}(M) \arrow[r, "\theta^{(k)}"] \arrow[dr, "\Phi"'] & V^{(k)}(M) \arrow[d, "\tau"] \\
& E(M)
\end{tikzcd}$$

$$\tau: M\to \mathrm{Hom}(V^{(k)}, E)$$

と見なされ，更にこれはP上の$(is^*\otimes\rho, \mathfrak{f}^{(k)*}\otimes W)$型テンソル

$$\tau: P\to \mathrm{Hom}(\mathfrak{f}^{(k)}, W)$$

となる。ここに$*$は dualを表わす。

たとえば，n次元微分多様体M上の接標構バンドルを

$P(M, GL(F))$, $F=R^n$ (n次元実数空間)

とする。P上の$(ad, \mathfrak{gl}(F))$型テンソル的2－form (Ω^λ_μ) は接着dxを用いて，

$$dx=\sum_\lambda \theta^\lambda e_\lambda, \qquad (e_\lambda)\in P,$$

$$\Omega^\lambda_\mu = \sum_{\sigma,\tau} R^\lambda{}_{\mu\sigma\tau}\,\theta^\sigma\wedge\theta^\tau$$

の形で表わされる。この場合

$$\mathfrak{gl}(F)\cong \mathrm{End}\,F\cong F^*\otimes F, \qquad \mathfrak{f}\cong F,$$

$$(R^\lambda_{\mu\sigma\tau}): P\to (F^*\wedge F^*)\otimes F^*\otimes F$$

であるから$(R^\lambda_{\mu\sigma\tau})$はM上の(1，3)－テンソル場である。

§12 Cartan 接続

$B(M, F, \widetilde{G})$，$F=\widetilde{G}/G$は，前節の条件(a)，(b)，をみたすファイバー・バンドルとし，section $\sigma: M\to B$をとる。

Bの同伴主バンドル$\widetilde{P}(M,\widetilde{G})$の構造群$\widetilde{G}$を section σによって部分群Gまで退化させて得られる主バンドルを$P(M,G)$とし，その injection を$\widetilde{\sigma}: P\to\widetilde{P}$とする。そこで，

$$\widetilde{\mathfrak{g}}=T_e(\widetilde{G}), \quad \mathfrak{g}=T_e(G), \quad \mathfrak{f}=T_{\bar{e}}(F),$$

$$\bar{e}=\tau(e), \quad \tau: \widetilde{G}\to F=\widetilde{G}/G\ :\text{自然射影},$$

とおけば，ベクトル空間の可換 diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "ad(a)"] & \widetilde{\mathfrak{g}} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "ad(a)"] & \mathfrak{f} \arrow[r] \arrow[d, "is(a)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\iota"] & \widetilde{\mathfrak{g}} \arrow[r, "\tau"] & \mathfrak{f} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad a\in G$$

が成立する(III，§7，命題1)。よって，$\mathfrak{g}$，$\widetilde{\mathfrak{g}}$，$\mathfrak{f}$ をそれぞれファイバーとする

$P(M,G)$の同伴バンドル

$$L(M)=P\times_{ad(G)}\mathfrak{g}, \quad \widetilde{L}(M)=P\times_{ad(G)}\widetilde{\mathfrak{g}},$$

$$V(M)=P\times_{is(G)}\mathfrak{f},$$

をとれば，M上のベクトル・バンドルの完全列

$$0\to L(M)\xrightarrow{\iota}\widetilde{L}(M)\xrightarrow{\tau}V(M)\to 0$$

を得る。一方，主バンドル$P(M,G)$に対して基本列

$$0\to L(M)\xrightarrow{\lambda}Q(M)\xrightarrow{\pi}T(M)\to 0$$

が定義されている(III，§9，定理)。

定義　条件(a)，(b)をみたすファイバー・バンドル$B(M,F,\widetilde{G})$の Cartan 接続とは，主バンドル$P(M,G)$から定まる上の二つの完全列の間に同型

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L(M) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, equal] & Q(M) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\omega"] & T(M) \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L(M) \arrow[r, "\iota"] & \widetilde{L}(M) \arrow[r, "\tau"] & V(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

を指定することである。即ち，ω，θは bijection で，関係

$$\tau\circ\omega=\theta\circ\pi, \quad \omega\circ\lambda=\iota,$$

をみたす。

この意味をしらべよう。先ず，bijection ω が与えられれば，関係$\tau\circ\omega=\theta\circ\pi$をみたす bijection θは一意的に定まる。よって，このωが Cartan 接続の構造を定義するものである。また，ωは$P(M,G)$上の$(ad,\widetilde{\mathfrak{g}})$型反変1－form

$$\omega: T(P)\to\widetilde{\mathfrak{g}}$$

と見なされる(III，§10，命題1)。これを Cartan 接続形式と呼ぶことにする。この form ωは主バンドル$\widetilde{P}(M,\widetilde{G})$上の接続を定義している。即ち，

$$\omega=\widetilde{\omega}\circ\widetilde{\sigma}, \quad \widetilde{\sigma}: P\to\widetilde{P}: \text{injection},$$

となる$\widetilde{P}(M,\widetilde{G})$上の接続形式

$$\widetilde{\omega}: T(\widetilde{P})\to\widetilde{\mathfrak{g}},$$

$$\widetilde{\omega}(\widetilde{X})=ad(a^{-1})\,\omega(X)+A,$$

$$\widetilde{X}=Xa+PaA\in T(\widetilde{P}),$$

$$\begin{tikzcd}
T(P) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\widetilde{\sigma}"'] & \widetilde{\mathfrak{g}} \\
T(\widetilde{P}) \arrow[ur, "\widetilde{\omega}"'] &
\end{tikzcd}$$

$X \in T_p(P)$, $a \in \tilde{G}$, $A \in \tilde{\mathfrak{g}}$,

が一意的に定まる。

命題1　Cartan 接続形式 $\omega : T(P) \to \tilde{\mathfrak{g}}$ は，次の条件で特性づけられる。

(i) $\omega \circ R_a = ad(a^{-1})\,\omega$,　$a \in G$,

(ii) 鉛直ベクトル $X \in V_p(P)$ に対して，$\omega(X) = p^{-1}X$,

(iii) $X \in T(P)$ に対して，$\omega(X) = 0$ ならば $X = 0$。

（証明）　条件 (i) は ω が反変形式であること，条件 (ii) は準同型 $\omega : Q(M) \to \tilde{L}(M)$ が $\omega \circ \lambda = \iota$ をみたすこと，そして条件 (iii) はこの準同型 ω が bijection であることを示している。　（証明終）

さて，Cartan 接続 ω から $\tilde{P}$ 上の接続 $\tilde{\omega}$ が定義されるが，逆に $\tilde{P}$ 上の任意の接続形式 $\tilde{\omega}$ に対して，P 上の 1-form

$$\omega = \tilde{\omega} \circ \tilde{\sigma} : T(P) \to \tilde{\mathfrak{g}}$$

は必ずしも条件 (iii) をみたさないから，これは一般には Cartan 接続ではない。即ち，Cartan 接続は $\tilde{P}$ 上の接続以外に，更に或る構造を定義している。それが接着である。

命題2　条件 (a)，(b) をみたすバンドル $B(M, F, \tilde{G})$ において，

$\sigma : M \to B$: section，$\tilde{\sigma} : P \to \tilde{P}$: injection，

$\tau : \tilde{G} \to F = \tilde{G}/G$: 自然射影，

とする。いま，B の接着および $\tilde{P}$ 上の接続が定義されたとし，その基底形式および接続形式をそれぞれ

$$\theta : T(P) \to \mathfrak{f}, \quad \tilde{\omega} : T(\tilde{P}) \to \tilde{\mathfrak{g}},$$

とする。P 上の 1-form $\omega = \tilde{\omega} \circ \tilde{\sigma}$ をとるとき，次の三つの条件はたがいに同値である。

(1) 形式 $\omega : T(P) \to \tilde{\mathfrak{g}}$ は Cartan 接続である。

(2) 関係 $\theta = \tau \circ \omega : T(P) \to \mathfrak{f}$ が成り立つ。

(3) 関係 $\theta = \bar{D}\sigma : T(M) \to V(M)$ が成り立つ。

ここに，$\bar{D}\sigma$ は接続 $\tilde{\omega}$ による section σ の内部的微分を表わす。

（証明）　先ず (1)⇔(2) を証明する。反変形式 ω，θ をベクトル・バンドルの準同型と見なすとき，関係 (2) は

$$\theta \circ \pi = \tau \circ \omega$$

と同値である。

$$\begin{tikzcd}
Q(M) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\omega"] & T(M) \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & O \\
\tilde{L}(M) \arrow[r, "\tau"] & V(M) \arrow[r] & O
\end{tikzcd}$$

次に (2)⇔(3) を証明する。

$\bar{D}\sigma \circ \pi = v \circ \sigma \circ \pi = \tau \circ \tilde{\omega} \circ \tilde{\sigma} = \tau \circ \omega = \theta \circ \pi$。

$$\begin{tikzcd}
T_p(P) \arrow[r, "\tilde{\sigma}"] \arrow[d, "\pi"] & T_{\tilde{\sigma}(p)}(\tilde{P}) \arrow[r, "\tilde{\omega}"] \arrow[d, "\tau"] & \tilde{\mathfrak{g}} \cong V_{\sigma(p)}(\tilde{P}) \arrow[d, "\tau"] \\
T_x(M) \arrow[r, "\sigma"] & T_{\sigma(x)}(B) \arrow[r, "v"] & \mathfrak{f} \cong V_x(M)
\end{tikzcd}$$

ゆえに，$\bar{D}\sigma = \theta$ が成り立つ（§10）。　（証明終）

Cartan 接続は存在するであろうか？　次の定理により，接着の存在が必要十分条件であることがわかる。

定理　条件 (a)，(b) をみたす（微分可能）ファイバー・バンドル $B(M, F, \tilde{G})$ において，接着 $\theta : T(P) \to \mathfrak{f}$ が存在すれば

(1) Cartan 接続 $\omega : T(P) \to \tilde{\mathfrak{g}}$ が存在する。

(2) P は絶対平行性をもつ。即ち，$T(P) \cong P \times \tilde{\mathfrak{g}}$

（証明）　微分可能なベクトル・バンドルの完全列

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & L(M) \arrow[r, shift left, "\lambda"] \arrow[d, equal] & Q(M) \arrow[l, shift left, "\omega_1"] \arrow[r, "\pi"] & T(M) \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & O \\
O \arrow[r] & L(M) \arrow[r, "\iota"] & \tilde{L}(M) \arrow[r, shift left, "\tau"] & V(M) \arrow[l, shift left, "\mu"] \arrow[r] & O
\end{tikzcd}$$

は必ず分解するから，微分可能な分解 μ，ω_1 をとれば，準同型

$$\omega = \mu \circ \theta \circ \pi + \iota \circ \omega_1 : Q(M) \to \tilde{L}(M)$$

は Cartan 接続となる。そして，これを P 上の form と見なせば，ベクトル・バンドルの bijection

$$\omega : T(P) \to P \times \tilde{\mathfrak{g}}, \quad X \to (p, \omega(X)), \quad X \in T_p(P),$$

が得られる。即ち，$T(P) \cong P \times \tilde{\mathfrak{g}}$ である。　（証明終）

解析的ファイバー・バンドルの場合，この定理は成立しない。それは解析的分解が必ずしも存在しないからである。

なお，接着の存在は，section およびバンドル準同型の存在を論ずることで，結局 obstruction の問題に帰する。

次に，いくつかの例を示そう。

微分多様体Mの接標構バンドルを$P(M, GL(n))$とする。

アフィン変換群$\tilde{G}$のLie 代数$\tilde{\mathfrak{g}}$は

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{f} + \mathfrak{gl}(n), \quad \mathfrak{f} = T_0(R^n) \cong R^n$$

で与えられる。そしてアフィン空間$R^n = \tilde{G}/GL(n)$ は分解的等質空間である。即ち，条件

$$ad(GL(n))\mathfrak{f} = \mathfrak{f}$$

がみたされる。さて，Mの接ベクトル・バンドルの恒等自己同型

$$\theta = 1 : T(M) \to T(M), \quad X \to X,$$

は接着である。(§11)。この基底形式を

$$\theta : T(P) \to \mathfrak{f}$$

とする。いま，M上のアフィン接続

$$\omega_1 : T(P) \to \mathfrak{gl}(n)$$

をとれば，1－form

$$\omega = \theta + \omega_1 : T(P) \to \tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{f} + \mathfrak{gl}(n)$$

は Cartan 接続形式となる。この意味で，任意のアフィン接続は Cartan 接続を定義するものと考えてよい。行列の記号を用いれば，アフィン接続は

$$dx = \sum_{\lambda} \theta^{\lambda} e_{\lambda}, \quad x \in M,$$

$$de_{\lambda} = \sum_{\mu} \omega_{\lambda}^{\mu} e_{\mu}, \quad (e_{\lambda}) \in P,$$

$$\theta = (\theta^{\lambda}), \quad \omega_1 = (\omega_{\mu}^{\lambda})$$

の形で表わされる。これは，Riemann 接続でも同様である。

また，PをLie 群，GをPの閉部分群として，等質空間P／Gをとる。群Pの Maurer–Cartan form

$$\omega : T(P) \to \mathfrak{p},$$

を主バンドル$P(P/G, G, \tau)$上の form と見なすとき，ωは積バンドル

$$B = P/G \times P/G$$

の Cartan 接続となり，その接着は

$$\theta = \tau \circ \omega : T(P) \to \mathfrak{f} = \mathfrak{p}/\mathfrak{g}$$

で与えられる(§11)。

n次元射影空間F上の射影変換群を$\tilde{G}$とすれば，Fは等質空間$F = \tilde{G}/G$として与えられる。ここにGはFの一点を動かさない部分群である。ファイバー・バンドル

$$B(M, F, \tilde{G}), \quad \dim M = \dim F,$$

の Cartan 接続を，多様体Mの射影接続という。

また，n次元球面S上の共形変換群を$\tilde{G}$とすれば，Sは等質空間$S = \tilde{G}/G$として与えられる。ファイバー・バンドル

$$B(M, S, \tilde{G}), \quad \dim M = \dim S,$$

の Cartan 接続を，多様体Mの共形接続という。

これらはいずれもよく知られている例である。

§13 Cartan 接続の曲率と捩率

記号は前節の通りとする。Cartan 接続形式ωに対して，主バンドル$\tilde{P}$上の接続形式

$$\tilde{\omega} : T(\tilde{P}) \to \tilde{\mathfrak{g}}, \quad \omega = \tilde{\omega} \circ \tilde{\alpha} : T(P) \to \tilde{\mathfrak{g}},$$

をとり，接続$\tilde{\omega}$の曲率形式$\tilde{\Omega}$に対して，form

$$\Omega = \tilde{\Omega} \circ \tilde{\alpha} : T^2(P) \to \tilde{\mathfrak{g}}, \quad \tilde{\Omega} : T^2(\tilde{P}) \to \tilde{\mathfrak{g}},$$

を制限曲率形式と呼ぶことにする。接続$\tilde{\omega}$の構造方程式から，

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

で与えられることがわかる。明らかに次の命題が成立する。

命題1　制限曲率形式Ωは主バンドル$P(M, G)$上の$(ad, \tilde{\mathfrak{g}})$型テンソル的 2－form である。

また，主バンドル$P(M, G)$上の form

$$\Omega_0 = \tau \circ \Omega : T^2(P) \to \mathfrak{f}$$

を第1種捩率形式（torsion form）という。明らかに，

命題2　第1種捩率形式Ω_0は$P(M,G)$上の$(is,\mathfrak{f})$型テンソル的2－formである。

命題3　$\Omega_0=0$となるための条件はΩが$(ad,\mathfrak{g})$型テンソル的形式となることである。

ここで，特に等質空間$F=\tilde{G}/G$が分解的である場合を考えよう。このとき，Cartan接続$\omega: T(P)\to\tilde{\mathfrak{g}}$は分解的（reductive）であるという。たとえば，アフィン接続，Riemann接続は分解的である。

さて，Lie代数の直和分解によって，Cartan接続形式ωを分解して，

$$\tilde{\mathfrak{g}}=\mathfrak{f}+\mathfrak{g};\qquad ad(G)\mathfrak{f}=\mathfrak{f},$$
$$\omega=\theta+\omega_1,\qquad \theta=\omega_{\mathfrak{f}},\qquad \omega_1=\omega_{\mathfrak{g}}$$
$$\theta: T(P)\to\mathfrak{f},\quad \omega_1: T(P)\to\mathfrak{g},$$

とすれば，form θは接着の基底形式となり，form ω_1は主バンドル$P(M,G)$上への誘導接続となる。それゆえ，

命題4　等質空間$F=\tilde{G}/G$が分解的であるとき，バンドル$B(M,F,\tilde{G})$の接着θが与えられれば，Cartan接続ωと，主バンドル$P(M,G)$上の接続ω_1とは，関係

$$\omega=\theta+\omega_1$$

によって1対1に対応する。

分解的 Cartan 接続$\omega=\theta+\omega_1$において，接着の基底形式θの接続ω_1による共変微分

$$\Theta=D_1\theta: T^2(P)\to\mathfrak{f}$$

を第2種捩率形式という。即ち，Θは

$$\Theta=d\theta+[\omega_1,\theta]$$

で与えられる。明らかに，

命題5　第2種捩率形式Θは$P(M,G)$上の$(is,\mathfrak{f})$型テンソル的2－formである。

分解$\omega=\theta+\omega_1$に対応する Codazziの方程式

$$D_1\theta=-\frac{1}{2}[\theta,\theta]_{\mathfrak{f}}+\Omega_{\mathfrak{f}}$$

を見れば，第1種捩率形式$\Omega_0=\Omega_{\mathfrak{f}}$と第2種捩率形式$\Theta=D_1\theta$との関係は

$$\Theta=-\frac{1}{2}[\theta,\theta]_{\mathfrak{f}}+\Omega_0$$

で与えられることがわかる。そして，

命題6　$\Theta=\Omega_0$となるための条件は，$F=\tilde{G}/G$が対称等質空間となることである。

（証明）　写像$\theta: T(P)\to\mathfrak{f}$はontoであるから，

$$[\theta,\theta]_{\mathfrak{f}}=0\iff[\mathfrak{f},\mathfrak{f}]_{\mathfrak{f}}=0\iff[\mathfrak{f},\mathfrak{f}]\subset\mathfrak{g}$$

命題7　分解的 Cartan 接続$\omega=\theta+\omega_1$において，第2種捩率形式をΘ，接続ω_1の曲率形式をΩ_1とすれば，第2 Bianchi の恒等式

$$D_1\Theta=d\Theta+[\omega_1,\Theta]=[\Omega_1,\theta]$$

が成り立つ。ここにD_1は接続ω_1による共変微分を表わす。

（証明）　この公式は，接着の基底形式θに対する Ricci の恒等式

$$D_1\Theta=D_1^2\theta=[\Omega_1,\theta]$$

に過ぎない（§3，定理4）　（証明終）

Cartan 接続はP上の絶対平行性

$$\omega: T(P)\cong P\times\tilde{\mathfrak{g}},\quad X\to(p,\omega(X)),\ X\in T_p(P),$$

を与えるものである（§12，定理）。特に，分解的 Cartan 接続$\omega=\theta+\omega_1$の場合，この状態をしらべる。$P(M,G)$上の接続ω_1に関する水平および鉛直射影をそれぞれ

$$h: T(P)\to H(P),\quad v: T(P)\to V(P),$$

とすれば，θはテンソル的形式，ω_1は接続形式であるから

$$\theta h=\theta,\quad \theta v=0,\quad \omega_1 h=0,\quad \omega_1 v=\omega_1,$$

である。また，bijection $\omega: T(P)\to P\times\tilde{\mathfrak{g}}$によって対応する直和分解をとるとき，

$$T(P)=H(P)\oplus V(P),\quad P\times\tilde{\mathfrak{g}}=(P\times\mathfrak{f})\oplus(P\times\mathfrak{g}),$$
$$\theta: H(P)\to P\times\mathfrak{f}:\ \text{bijection},\quad \theta: V(P)\to 0,$$
$$\omega_1: V(P)\to P\times\mathfrak{g}:\ \text{bijection},\quad \omega_1: H(P)\to 0,$$

となる。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V(P) \arrow[r, shift left] \arrow[d, "\omega_1"] & T(P) \arrow[l, shift left, "v"] \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\omega"] & H(P) \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P\times\mathfrak{g} \arrow[r] & P\times\tilde{\mathfrak{g}} \arrow[r, shift left] & P\times\mathfrak{f} \arrow[l, shift left] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

さて，元$A\in\tilde{\mathfrak{g}}$ をとれば，絶対平行性ω：$T(P)\cong P\times\tilde{\mathfrak{g}}$ によつて，P上のベクトル場

$$A^*: P\to T(P),\quad \omega(A^*)=A\,(一定)\in\tilde{\mathfrak{g}}\ ,$$

が一意的に定まる。これを平行ベクトル場と呼ぶことにする。

特に元$A\in\mathfrak{g}$をとれば，平行ベクトル場A^*は鉛直であつて，これは主バンドル$P(M,G)$ の基本ベクトル場に他ならない（Ⅲ，§9，定義1）。このとき，

$$\theta(A^*)=0,\quad \omega(A^*)=\omega_1(A^*)=A\in\mathfrak{g}\ ,$$

である。これに対して，元$A\in\mathfrak{f}$ をとれば，平行ベクトル場A^*は接続ω_1 に関して水平である。これを基底ベクトル場と呼ぶことにする。このとき，

$$\omega_1(A^*)=0,\quad \omega(A^*)=\theta(A^*)=A\in\mathfrak{f}$$

である。

命題8　Ⓗ$=0$であるための条件は，任意の二つの基底ベクトル場A^*, B^*に対して，ベクトル場$[A^*,B^*]$ が鉛直となることである。

（証明）　基底ベクトル場A^*, B^* に対して　$\theta(A^*),\theta(B^*)$は一定であるから

$$d\theta(A^*,B^*)=\frac{1}{2}\left\{A^*\theta(B^*)-B^*\theta(A^*)-\theta([A^*,B^*])\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\theta([A^*,B^*])$$

となる。また，　$\omega_1(A^*)=\omega_1(B^*)=0$であるから

$$Ⓗ(A^*,B^*)=d\theta(A^*,B^*)$$

$$+\frac{1}{2}\left\{[\omega_1(A^*),\theta(B^*)]-[\omega_1(B^*),\theta(A^*)]\right\}$$

$$=d\theta(A^*,B^*)$$

ゆえに，$Ⓗ(A^*,B^*)=-\frac{1}{2}\ \theta([A^*,B^*])$

となる。よつてⒽ$=0$ならば，$\theta([A^*,B^*])=0$，即ち$[A^*,B^*]$ は鉛直である。逆に$[A^*,B^*]$ が鉛直ならば，$Ⓗ(A^*,B^*)=0$ である。任意の接ベクトル$X, Y\in T(P)$は平行ベクトル場として一意的に拡げることができる。このときhX，hYは基底ベクトル場となる。Ⓗ はテンソル的形式であるから Ⓗ$=$Ⓗh である。ゆえに，

$$Ⓗ(X,Y)=Ⓗ(hX,hY)=0$$

が成り立つ。即ち Ⓗ$=0$である。

§14　構造テンソル

Eをn次元ベクトル空間として，Lie 群Gの表現

$$\rho: G\to GL(E)$$

をとる。表現ρの双対表現を

$$\rho^*={}^t\rho^{-1}: G\to GL(E^*)$$

とし，また表現ρから引き起されるLie 代数の表現を

$$\bar{\rho}: \mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(E)=\mathrm{End}\ E\cong E^*\otimes E$$

とする。いま，ベクトル空間E^*から（0，2）−テンソル空間E^0_2 および外2−ベクトル空間$E_{[2]}$をつくる。即ち

$$E^0_2=E^*\otimes E^*,\quad E_{[2]}=E^*\wedge E^*$$

とする。そして準同型　α_0，αを次のように定義する。

$$\alpha_0: E^0_2\to E_{[2]}\ ,\ \Sigma x\otimes y\to\Sigma x\wedge y\ ,\qquad x, y\in E^*,$$

$$\alpha: E^*\otimes\mathfrak{g}\to E^{\ 1}_{[2]}=(E^*\wedge E^*)\otimes E,$$

$$\alpha=(\alpha_0\otimes 1)\circ(1\otimes\bar{\rho}),$$

$$E^*\otimes\mathfrak{g}\xrightarrow{\mathbb{1}\otimes\bar{\rho}} E^*\otimes E^*\otimes E\xrightarrow{\alpha_0\otimes\mathbb{1}}(E^*\wedge E^*)\otimes E=E^{1}_{[2]}.$$

また，ベクトル空間$E^*\otimes\mathfrak{g}$，$E^{1}_{[2]}$上には，表現

$$\rho_1=\rho^*\otimes ad : G\to GL(E^*\otimes\mathfrak{g}),$$

$$\rho_2=(\rho^*\wedge\rho^*)\otimes\rho : G\to GL(E^{1}_{[2]}),$$

が定義されていて，条件

$$\alpha\circ\rho_1(a)=\rho_2(a)\circ\alpha,\quad a\in G,$$

をみたす。それゆえ，ベクトル空間の完全列

$$0\to\mathrm{Ker}\ \alpha\xrightarrow{\lambda}E^*\otimes\mathfrak{g}\xrightarrow{\alpha}E^{1}_{[2]}\xrightarrow{\kappa}\mathrm{Coker}\ \alpha\to 0,$$

$$\mathrm{Coker}\ \alpha=E^{1}_{[2]}/\mathrm{Im}\,\alpha,$$

は群Gの作用と可換である。即ち，完全列の可換 diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\ \alpha \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\rho_1(a)"] & E^*\otimes\mathfrak{g} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\rho_1(a)"] & E^{1}_{[2]} \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\rho_2(a)"] & \mathrm{Coker}\ \alpha \arrow[r] \arrow[d, "\rho_3(a)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\ \alpha \arrow[r, "\lambda"] & E^*\otimes\mathfrak{g} \arrow[r, "\alpha"] & E^{1}_{[2]} \arrow[r, "\kappa"] & \mathrm{Coker}\ \alpha \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$a\in G,$$

が成立する。いま，$P(M,G)$を主バンドル，$P'(M,GL(E))$を多様体Mの接標構バンドルとして，群Gの表現ρより定まるバンドル準同型

$$\rho : P\to P',\qquad \rho : G\to GL(E),$$

$$\rho(pa)=\rho(p)\rho(a),\quad p\in P,\quad a\in G,$$

が存在すると仮定する。このとき接ベクトル$T(M)$の構造群$GL(E)$はその部分群$\rho(G)$まで退化して

$$\theta : T(M)\cong P\times_{\rho(G)}E$$

となる。この bijection θを$P(M,G)$上の(ρ, E)型テンソル的1−form

$$\theta : T(P)\to E$$

と見なして，(II，§10，命題3)，これをバンドル準同型

$$\rho : P(M,G)\to P'(M,GL(E))$$

の基底形式(basic form)と呼ぶことにする。$P(M,G)$上の任意の(r, V)型テンソル的 k−form

$$\Phi : T^{(k)}(P)\to V$$

に対して，$((\rho^*\wedge\cdots\cdots\wedge\rho^*)\otimes r,\ E_{(k)}\otimes V)$ 型テンソルΦ_*が定まり

$$\Phi=\Phi_*\,\theta\wedge\cdots\cdots\wedge\theta,\quad \Phi_* : P\to\mathrm{Hom}(E^{(k)}, V)\cong E_{(k)}\otimes V,$$

で表わされる(§11)。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T^{(k)}(P) \arrow[r, "\mathbb{1}\otimes\theta^{(k)}"] \arrow[dr, "\Phi"'] & P\times E^{(k)} \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_*"] & 0 \\
 & & P\times V &
\end{tikzcd}$$

命題1　$P(M,G)$上の$(ad,\mathfrak{g})$型テンソル的1−form

$$\varphi : T(P)\to\mathfrak{g}$$

に対して，(ρ, E)型テンソル的2−form $\Phi=\bar{\rho}(\varphi)\theta$ をとれば，

$$\Phi_*=-\alpha\circ\varphi_*,$$

$$\varphi=\varphi_*\,\theta,\quad \varphi_* : (\rho_1, E^*\otimes\mathfrak{g})\ \text{型テンソル}$$

$$\Phi=\Phi_*\,\theta\wedge\theta,\quad \Phi_* : (\rho_2, E^{1}_{[2]})\ \text{型テンソル}$$

で与えられる。

(証明)　Eの base(e_i)をとり，その dual base を(e^i)とする。また，$\mathfrak{g}$の base(A_σ)をとり

$$\bar{\rho}(A_\sigma)e_j=\sum_i \rho^{i}_{\sigma j}e_i,\quad \rho^{i}_{\sigma j}\in R,$$

とおけば，定義により，準同型αは

$$\alpha : E^*\otimes\mathfrak{g}\to E^{1}_{[2]},\quad \xi\to\alpha(\xi),$$

$$\xi=\sum_{\sigma, i}\xi^{\sigma}_{i}e^i\otimes A_\sigma\in E^*\otimes\mathfrak{g},\quad \xi^{\sigma}_{i}\in R,$$

$$\alpha(\xi)=\frac{1}{2}\sum_{\sigma,i,j,k}(\rho^{i}_{\sigma j}\xi^{\sigma}_{k}-\rho^{i}_{\sigma k}\xi^{\sigma}_{j})(e^{j}\wedge e^{k})\otimes e_{i},$$

で与えられる。そこで

$$\theta=\sum_{i}\theta^{i}e_{i},\quad \varphi=\sum_{\sigma}\varphi^{\sigma}A_{\sigma},\quad \varphi^{\sigma}=\sum_{i}\varphi^{\sigma}_{*i}\theta^{i},$$

とおけば，

$$\bar{\rho}(\varphi)\theta=\frac{1}{2}\sum_{\sigma,i,j,k}(\rho^{i}_{\sigma j}\varphi^{\sigma}_{*k}-\rho^{i}_{\sigma k}\varphi^{\sigma}_{*j})(\theta^{k}\wedge\theta^{j})\otimes e_{i}$$

$$=-\sum_{i,j,k}\alpha(\varphi_{*})^{i}_{jk}(\theta^{j}\wedge\theta^{k})\otimes e_{i}$$

$$=-\alpha(\varphi_{*})\theta\wedge\theta。$$ （証明終）

いま，P(M,G) 上の接続 ω : T(P) $\to\mathfrak{g}$ をとる。基底形式 θ の共変微分 $\Theta=D\theta$ を，準同型 ρ : P→P′ に関する接続 ω の捩率形式と呼ぶことにする。これは

$$\Theta=\Theta_{*}\theta\wedge\theta : T^{2}(P)\to E,$$

$$\Theta_{*} : P\to E^{1}_{[2]} \ : (\rho_{2}, E^{1}_{[2]})\text{型テンソル},$$

で表わされる。この Θ_{*} を接続 ω の捩率テンソルという。更に

$$S=\kappa\circ\Theta_{*} : P\to \mathrm{Coker}\ \alpha$$

とおけば，Sは $(\rho_{3}, \mathrm{Coker}\ \alpha)$ 型テンソルである。このSをP(M,G)の構造テンソル（structure tensor）という。

定理1　P(M,G)の構造テンソルSは，P(M,G)上の接続のとり方に依存しない。

（証明）　P(M,G)上に二つの接続 ω，ω' をとり，

$$\omega'-\omega=\varphi=\varphi_{*}\theta$$

とおけば，φ は $(ad, \mathfrak{g})$ 型テンソル的 1-form である。接続 ω，ω' の捩率形式をそれぞれ

$$\Theta=\Theta_{*}\theta\wedge\theta,\qquad \Theta'=\Theta'_{*}\theta\wedge\theta,$$

とすれば，命題1より，

$$\Theta'-\Theta=(d\theta+\bar{\rho}(\omega')\theta)-(d\theta+\bar{\rho}(\omega)\theta)=\bar{\rho}(\varphi)\theta,$$

$$\Theta'_{*}-\Theta_{*}=-\alpha(\varphi_{*}) : P\to \mathrm{Im}\ \alpha,$$

となる。ゆえに

$$\kappa\circ\Theta'_{*}-\kappa\circ\Theta_{*}=0$$ （証明終）

さて，ベクトル空間の完全列

$$0\to \mathrm{Ker}\ \alpha\xrightarrow{\lambda}E^{*}\otimes\mathfrak{g}\xrightarrow{\alpha}E^{1}_{[2]}\xrightarrow{\kappa}\mathrm{Coker}\ \alpha\to 0$$

は群Gの作用と可換であるから，これらのベクトル空間をファイバーとするP(M,G)の同伴バンドル

$$B_{1}=P\times_{\rho_{1}(G)}\mathrm{Ker}\ \alpha,\qquad B_{2}=P\times_{\rho_{1}(G)}(E^{*}\otimes\mathfrak{g}),$$

$$B_{3}=P\times_{\rho_{2}(G)}E^{1}_{[2]},\qquad B_{4}=P\times_{\rho_{3}(G)}\mathrm{Coker}\ \alpha,$$

をとれば，M上のベクトル・バンドルの完全列

$$0\to B_{1}(M)\xrightarrow{\lambda}B_{2}(M)\xrightarrow{\alpha}B_{3}(M)\xrightarrow{\kappa}B_{4}(M)\to 0$$

を得る。微分多様体Mは paracompact と仮定しているから，これらのバンドルの（微分可能）大域的 sections 全体のつくる実係数加群をそれぞれ A_{1},A_{2},A_{3},A_{4} とすれば，加群の完全列

$$0\to A_{1}\xrightarrow{\lambda}A_{2}\xrightarrow{\alpha}A_{3}\xrightarrow{\kappa}A_{4}\to 0$$

が成り立つ。これはバンドル $B_{i}(M)$ の局所的 sectionsの芽の層がいずれもfine となるからである（V，§5参照）。

なお，これらの加群 A_{1},A_{2},A_{3},A_{4} はそれぞれ P(M,G)上の

$$(\rho_{1}, \mathrm{Ker}\ \alpha),\ (\rho_{1}\ E^{*}\otimes\mathfrak{g}),\ (\rho_{2}, E^{1}_{[2]}),\ (\rho_{3}, \mathrm{Coker}\ \alpha)$$

型テンソル全体のつくる加群と見なされる（III，§10）。したがって次の命題が成立する。

命題2　P(M,G)上の $(\rho_{2}, E^{1}_{[2]})$ 型テンソル Φ_{*} を捩率テンソルとするP上の接続が存在するための条件は

$$\kappa\Phi_{*}=S,\qquad S : \text{構造テンソル},$$

となることである。そして，P上の任意の接続の捩率テンソル Θ_{*} は，

$$\Theta_* = a\varphi_* + \Phi_*, \qquad \varphi_* : (\rho_1, E^*\otimes\mathfrak{g})\ 型テンソル,$$
$$\kappa\Phi_* = S, \qquad \Phi_* : (\rho_2, E^1_{[2]})\ 型テンソル$$

の形で表わされる。

命題３　P(M,G) 上に捩率のない接続，即ち，捩率形式 $\Theta=0$ となる接続が存在するための条件は，構造テンソル $S=0$ となることである。

P(M,G) 上の一つの接続 ω_0 をとるとき，P 上の他の接続 ω は

$$\omega=\omega_0+\varphi, \quad \varphi=\varphi_*\theta, \quad \varphi_*\in A_2,$$

の形で与えられることに注意すれば，上の命題の成立は加群の列

$$0\to A_1\to A_2\to A_3\to A_4\to 0$$

の完全性から明らかである。

簡単な例を示そう。微分多様体M上の接標構バンドル P' の構造群GL(E) は直交群O(E) まで退化するから，制限Pをとり，その injection を

$$\rho : P(M,O(E)) \to P'(M,GL(E)), \quad p\to p,$$

とすれば，これは群の injection

$$\rho : O(E) \to GL(E), \quad a\to a,$$

より定まるバンドル準同型である。そして

$$\mathfrak{o}(E)=\{(A^i_j)\in E^*\otimes E;\ A^i_j+A^j_i=0\},$$

$$E^*\otimes\mathfrak{o}(E)=\{(\xi^i_{jk})\in E^1_2;\ \xi^i_{jk}+\xi^k_{ji}=0\}$$

$$E^1_{[2]}=\{(\xi^i_{jk})\in E^1_2;\ \xi^i_{jk}+\xi^i_{kj}=0\}$$

$$a : E^*\otimes\mathfrak{o}(E)\to E^1_{[2]}$$

$$(\xi^i_{jk})\to\frac{1}{2}(\xi^i_{jk}-\xi^i_{kj}),$$

で与えられる。また，主バンドル P(M,O(E)) 上には捩率をもたない接続，即ち Riemann 接続が存在するから，構造テンソル S＝0である。

更に一般的な例として接着について考えよう。§11 の条件 (a),(b) をみたすファイバ

ー・バンドル $B(M,F,\tilde{G})$, $F=\tilde{G}/G$，の接着

$$\theta : T(P)\to\mathfrak{f}, \qquad P=P(M,G),$$

が与えられたとする。このとき

$$T(M)\cong P\times_{is(G)}\mathfrak{f}$$

であるから，群Gの等方性表現 is より定まるバンドル準同型

$$\rho : P\to P'=P\times_{is(G)}GL(\mathfrak{f}), \quad is : G\to GL(\mathfrak{f}),$$

をとれば，P(M,G) の拡大 P' はMの接標構バンドルになつている。それゆえ，このバンドル準同型 ρ から P(M,G) 上の構造テンソルSが定まる。これを接着の構造テンソルと呼ぶことにする。この場合，ρ の基底形式は接着の基底形式 θ と一致している。

自然射影

$$\tau : \tilde{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{f}=\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g},$$
$$\tau\circ ad(a)=is(a)\circ\tau, \quad a\in G,$$

をとれば，群Gの等方性表現 $is : G\to GL(\mathfrak{f})$ から引き起されるLie 代数の表現は

$$\bar{\rho} : \mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{f})\cong End(\mathfrak{f})\cong\mathfrak{f}^*\otimes\mathfrak{f}$$
$$\bar{\rho}(A)\tau B=\tau[A,B], \quad A\in\mathfrak{g}, \quad \tau B\in\mathfrak{f}, B\in\tilde{\mathfrak{g}},$$

で与えられる。これを用いてベクトル空間の準同型

$$a : \mathfrak{f}^*\otimes\mathfrak{g}\to\mathfrak{f}^1_{[2]}, \quad \kappa : \mathfrak{f}^1_{[2]}\to \mathrm{Coker}\ a$$

が定義される。また，表現

$$\rho_1 : G\to GL(\mathfrak{f}^*\otimes\mathfrak{g}), \quad \rho_2 : G\to GL(\mathfrak{f}^1_{[2]}),$$
$$\rho_3 : G\to GL(\mathrm{Coker}\ a)$$

の定義も先に述べた通りである。

いま，P(M,G) 上の接続 $\omega_1 : T(P)\to\mathfrak{g}$ をとり，その共変微分を D_1 で表わせば，基底形式 θ に対して，

$$D_1\theta=d\theta+\bar{\rho}(\omega_1)\theta=d\theta+\bar{\rho}(\omega_1)\tau\tilde{\theta}$$
$$=d\theta+\tau[\omega_1,\tilde{\theta}]$$
$$\tilde{\theta} : T(P)\to\tilde{\mathfrak{g}} : 1\text{-form}, \quad \tau\tilde{\theta}=\theta,$$

となる。そして接着の構造テンソルSは

$$D_1\theta=\Theta_*\theta\wedge\theta, \quad \kappa\Theta_*=S$$

で与えられる。そこで，バンドル $B(M,F,\widetilde{G})$ の Cartan 接続

$$\omega : T(P) \to \widetilde{\mathfrak{g}}, \quad \tau\omega = \theta,$$

をとり，その第1種捩率形式を Ω_0 とする。即ち

$$\Omega_0 = \tau\left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]\right) = d\tau\omega + \frac{1}{2}\tau[\omega, \omega]$$

$$= d\theta + \frac{1}{2}\tau[\omega, \omega]$$

である。いま，

$$\Omega_0 = \Omega_{0*}\theta\wedge\theta, \quad \kappa\Omega_{0*} = S_0 : P \to \mathrm{Coker}\ \alpha,$$

とおけば，S_0 は P 上の（ρ_3，Coker α）型テンソルとなる。これを第1種構造テンソルと呼ぶことにする。

定理 2　第1種構造テンソル S_0 は $B(M,F,\widetilde{G})$ の Cartan 接続のとり方に依存しない。

（証明）　二つの Cartan 接続

$$\omega, \omega' : T(P) \to \widetilde{\mathfrak{g}}, \quad \tau\omega = \tau\omega' = \theta,$$

をとれば，form

$$\varphi = \omega' - \omega : T(P) \to \mathfrak{g},$$

は $P(M,G)$ 上の（ad, $\mathfrak{g}$）型テンソル的1−form となる。接続 ω，ω' の第1種捩率形式をそれぞれ Ω_0, Ω_0' とすれば，

$$\Omega_0' - \Omega_0 = \left(d\theta + \frac{1}{2}\tau[\omega', \omega']\right) - \left(d\theta + \frac{1}{2}\tau[\omega, \omega]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\tau[\varphi, \omega'] + \frac{1}{2}\tau[\varphi, \omega]$$

$$= \frac{1}{2}\bar{\rho}(\varphi)\tau\omega' + \frac{1}{2}\bar{\rho}(\varphi)\tau\omega$$

$$= \bar{\rho}(\varphi)\theta$$

となる。よつて命題1より，

$$\Omega_{0*}' - \Omega_{0*} = -\alpha\varphi_*,$$

$$\varphi = \varphi_*\theta, \quad \Omega_0' = \Omega_{0*}'\theta\wedge\theta, \quad \Omega_0 = \Omega_{0*}\theta\wedge\theta,$$

となる。ゆえに

$$\kappa\Omega_{0*}' - \kappa\Omega_{0*} = 0 \qquad \text{（証明終）}$$

なお，この S_0 は接着の構造テンソル S とは一致しない。

命題 4　$P(M,G)$ 上の（ad, $\widetilde{\mathfrak{g}}$）型ソンソル的1−form

$$\psi : T(P) \to \widetilde{\mathfrak{g}}, \quad \tau\psi = \theta,$$

に対して，

$$\tau[\psi, \psi] = \Psi_*\theta\wedge\theta, \quad \kappa\Psi_* = A : P \to \mathrm{Coker}\ \alpha,$$

とおけば，（ρ_3，Coker α）型テンソル A はこのような ψ のとり方に関わりなく定まり，

$$S_0 = \frac{1}{2}A + S$$

が成り立つ。

（証明）　$P(M,G)$ の接続 $\omega_1 : T(P) \to \mathfrak{g}$ をとれば，$B(M,F,\widetilde{G})$ の任意の Cartan 接続 ω は

$$\omega = \omega_1 + \psi : T(P) \to \widetilde{\mathfrak{g}}, \quad \tau\omega = \theta,$$

の形で与えられる。接続 ω_1 による共変微分を D_1 で表わし，また，Cartan 接続 ω の第1種捩率形式を Ω_0 とすれば，

$$\Omega_0 - D_1\theta = \left(d\theta + \frac{1}{2}\tau[\omega, \omega]\right) - (d\theta + \bar{\rho}(\omega_1)\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\tau[\omega, \omega] - \tau[\omega_1, \omega]$$

$$= \frac{1}{2}\tau[\omega - \omega_1, \omega - \omega_1] - \underbrace{\frac{1}{2}\tau[\omega_1, \omega_1]}_{=0}$$

$$= \frac{1}{2}\tau[\psi, \psi]$$

となる。ゆえに

$$S_0 - S = \frac{1}{2}A \qquad \text{（証明終）}$$

特に，等質空間$F=\tilde{G}/G$が分解的である場合，分解的 Cartan 接続 $\omega=\theta+\omega_1$ の第2種捩率テンソル$Ⓗ=D_1\theta$ に対して，

$$Ⓗ=Ⓗ_*\theta\wedge\theta,\quad \kappa Ⓗ_*=S: P\rightarrow \mathrm{Coker}\ \alpha,$$

とおけば，Sは接着の構造テンソルと一致する。更にFが対称等質空間のとき

$$A=0,\quad S_0=S,$$

となる。Cartan 接続の捩率については，このS_0，S を用いて，一般論で述べた結果がそのまま適用される。

§15 複素解析的バンドル上の接続

Mを複素解析多様体，Gを複素Lie 群として，複素解析的主バンドル P(M,G)を考える。P(M,G) の基本列

$$0\rightarrow L(M)\xrightarrow{\lambda} Q(M)\xrightarrow{\pi} T(M)\rightarrow 0$$

において，ベクトル・バンドルおよび準同型はいずれも複素解析的であつて，この列は一般に解析的な分解をもたないから，P(M,G) 上の解析的な接続は一般には存在しない。特に，M が Stein 多様体であれば存在することがわかる。V_c を複素ベクトル空間として，P上の値域V_c のC^∞ k-form Φは一意的に

$$\Phi=\sum_{r+s=k}\Phi^{r,s}:\ T^k(P)\rightarrow V_c$$

$$\Phi^{r,s}: T^k(P)\rightarrow V_c:\ (r,s)\text{-form}$$

の形で書かれる（Ⅰ，§7）。いま，群Gの解析的表現

$$\rho: G\rightarrow GL(V_c)$$

より定まる P(M,G) の同伴バンドルを $B(M,V_c,G)$ とすれば，これはM上の解析的ベクトル・バンドルである。また， P(M,G) 上の(ρ,V_c) 型反変(r,s)-forms 全体および(ρ,V_c) 型テンソル的(r,s)-forms 全体のつくるC-加群をそれぞれ $\tilde{A}^{r,s}(M,B)$， $A^{r,s}(M,B)$とする。特にBが積バンドル$B=M\times V_c$ であれば，$A^{r,s}(M,B)$ はM上の値域V_c の(r,s)-forms 全体のつくるC-加群と見なされる。

P(M,G) 上の接続形式 $\omega: T(P)\rightarrow\mathfrak{g}$ が解析的，C^∞，(1,0)型である場合にしたがつて，この接続はそれぞれ解析的接続，C^∞-接続，(1,0)-接続と呼ばれる。解析的

接続は一般に存在しないが，C^∞-接続はいつも存在し，特に(1,0)-接続の存在が保証される（Ⅷ，§3，参照）。

P(M,G) 上にC^∞-接続 $\omega: T(P)\rightarrow\mathfrak{g}$ が与えられたとき，P上の(r,s)-form Φの共変微分は

$$D\Phi=D'\Phi+D''\Phi$$

$$D'\Phi: (r+1,s)\text{-form},\quad D''\Phi: (r,s+1)\text{-form}$$

の形に分けられる。特にωを(1,0)-接続とすれば，その曲率形式Ωに対して

$$D\omega=\Omega=d\omega+\frac{1}{2}[\omega,\omega]=d'\omega+\frac{1}{2}[\omega,\omega]+d''\omega,$$

$$D'\omega=\Omega^{20}=d'\omega+\frac{1}{2}[\omega,\omega],$$

$$D''\omega=\Omega^{1,1}=d''\omega$$

となる。また，ωを(1,0)-接続，Φを(ρ,V_c) 型テンソル的(r,s)-formとすれば，

$$D\Phi=d\Phi+\bar{\rho}(\omega)\Phi=d'\Phi+\bar{\rho}(\omega)\Phi+d''\Phi,$$

$$D'\Phi=d'\Phi+\bar{\rho}(\omega)\Phi,$$

$$D''\Phi=d''\Phi$$

となり，$D'\Phi$，$D''\Phi$ もまた(ρ,V_c) 型テンソル的形式である。それゆえ，テンソル的形式に対する反微分D''は(1,0)-接続のとり方に関係なく$D''=d''$で与えられ，かつ，$d''\circ d''=0$ であるから，コチエイン複体

$$A^{r*}=\sum_{s\geq 0}A^{r,s}(M,B),$$

$$A^{r,0}\xrightarrow{d''}A^{r,1}\xrightarrow{d''}A^{r,2}\xrightarrow{d''}\cdots\cdots\xrightarrow{d''}A^{r,s}\xrightarrow{d''}\cdots\cdots$$

を得る。この複体のs次元コホモロジー群を $H^s(M,B\otimes O^r)$ で表わすことにする。そこで，P(M,G) の (1,0)-接続

$$\omega\in\tilde{A}^{1,0}(M,L),\qquad L(M)=P\times_{ad(G)}\mathfrak{g},$$

に対して，form $\Omega^{1,1}$ をとれば，

$$\Omega^{1,1}=D''\omega=d''\omega\in A^{1,1}(M,L)$$

$$d''\Omega^{1,1}=d''^2\omega=0$$

となり，コサイクル$\Omega^{1,1}$ で代表されるコホモロジー類

$$a(P) \in H^1(M, L \otimes O^1)$$

が定まる。

定理　コホモロジー類$a(P)$は P(M,G) 上の(1,0)－接続のとり方に依存しない。

(証明)　P(M,G) 上の二つの(1,0)－接続

$$\omega, \theta \in \widetilde{A}^{1,0}(M, L)$$

をとり，その曲率形式をそれぞれΩ，Ⓗ とすれば，

$$\varphi = \omega - \theta \in A^{1,0}(M, L)：テンソル的形式,$$

$$\Omega^{1,1} - Ⓗ^{1,1} = d''\varphi \simeq 0 \quad (\text{coboundary})$$

となる。即ち，forms　$\Omega^{1,1}$，Ⓗ^{1,1}は$H^1(M, L \otimes O^1)$における同じコホモロジー類を代表する。　　　(証明終)

もし，P(M,G) 上に解析的接続$\omega \in \widetilde{A}^{1,0}(M, L)$が存在すれば，$\Omega^{1,1} = d''\omega = 0$であるから，$a(P) = 0$ となる。逆に，$a(P) = 0$ であれば，P(M,G) の基本列の解析的分解が存在して，P(M,G) 上に解析的接続が与えられる(Ⅷ，§4参照)。

Ⅴ.　層

§1．層の定義

定義　位相空間X，S及びSからXへの連続写像πが次の条件(Ⅰ)，(Ⅱ)を充すとき，(S, X, π)をX上の集合の層と云う。

(Ⅰ)　πは上への写像。

(Ⅱ)　πは局所位相同型。

(S, X, π)，(S', X', π')を同じ空間X上の集合の層とするとき，直積空間$S \times S'$の点(s, s')で$\pi(s) = \pi'(s')$となるものの全体に$S \times S'$の相対位相を入れた空間を，SとS'の対角線的空間と云い，$S + S'$で表わす。

(Ⅲ) 1°)　Xの各点xに対して，πの逆像$\pi^{-1}(x)$（之をx上の茎と云いS_xで表わす）は群である。

2°)　各茎の群構造の結合による対応$S + S \to S$は連続写像。

(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)　を充す(S, X, π)を群の層と云い，特に各茎が加群のとき加群の層と云う。

(Ⅲ′) 1°)　Xの各点xに対して，S_xが環。

2°)　(S, X, π)が各茎の環の加法構造に関して加群の層。

3°)　各茎の環の積結合による対応$S + S \to S$は連続写像。

(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ′)　を充す(S, X, π)を環の層と云う。$(\mathfrak{a}, X, \pi')$　を環の層とし，同じX上の加群の層(S, X, π)が，

(Ⅲ″) 1°)　Xの各点xに対して，S_xが左(又は右)$\mathfrak{a}_x$－加群。

2°)　各茎の$\mathfrak{a}_x$－加群構造による対応　$\mathfrak{a} + S \to S$；

$$(\alpha \in \mathfrak{a}_x, s \in S_x) \to \alpha \cdot s \in S_x が連続写像。$$

を充すとき，(S, X, π)を環の層$(\mathfrak{a}, X, \pi')$　を係数とする左(右)－加群の層と云う。或は$\boldsymbol{\mathfrak{a}} = (\mathfrak{a}, X, \pi')$として，左(右)$\boldsymbol{\mathfrak{a}}$－加群の層と云う。

(Ⅱ)からS_xにSの相対位相を入れれば，S_xは分散的位相空間となる。又空間Xがハウスドルフ空間であっても，Sは一般にハウスドルフとならない。(§2．例3．参照)